CHAPITRE 2

Sommes et produits

2.1 Sommes : symbole $\sum$

2.1.1 Indices muets

Définition 1

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_p$ des réels. La somme $S = u_0 + u_1 + +u_2 + \cdots + u_p$ se note aussi

$$S = \sum_{k=0}^{p} u_k$$

Remarques :

R 1 – La lettre k peut en réalité être remplacée par n'importe quelle autre lettre (qui n'est pas déjà utilisée !). On dit que c'est une **lettre muette**, appelée l'**indice de sommation**. On peut ainsi écrire :

$$S = \sum_{k=0}^{p} u_k = \sum_{i=0}^{p} u_i = \sum_{j=0}^{p} u_j$$

R 2 – Dans la somme $\sum_{k=0}^{p} u_k$, il y a $n+1$ termes.

Plus généralement, dans la somme $\sum_{k=p}^{n} u_k$, il y a $n-p+1$ termes.

R 3 – On peut parfois séparer une somme en deux. Soit $n \geqslant 1$ et soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k$$

et

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{p-1} a_k$$

2.1.2 Propriétés

Proposition 2

Soient $p \in \mathbb{N}$ et soient $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p$ des réels. Alors

- $$\sum_{k=1}^{p} (u_k + v_k) = \sum_{k=1}^{p} u_k + \sum_{k=1}^{p} v_k$$
- *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*
$$\sum_{k=1}^{p} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=1}^{p} u_k$$
- $$\sum_{k=1}^{p} 1 = p$$

Remarques :

R 1 – Attention aux valeurs minimale et maximale de l'indice de sommation. On a par exemple

$$\sum_{k=1}^{100} 1 = 100, \qquad \sum_{k=0}^{100} 1 = 101$$

R 2 – Parfois certaines sommes peuvent se simplifier en dominos : c'est le cas lorsque le terme dans la somme est de la forme $v_{n+1} - v_n$:

$$\sum_{k=1}^{p} (v_{k+1} - v_k) = (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \dots + (v_{p+1} - v_p) = v_{p+1} - v_1$$

On dit qu'on a une **somme télescopique**

2.1.3 Changements d'indices

Remarque :

Lorsqu'on a une somme $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k$, on peut réaliser pour convenance deux types de **changements d'indice** :

- un changement par décalage d'indice : on pose $\ell = k + j \iff k = \ell - j$ où k est un entier fixé.
- un changement où on inverse l'ordre d'énumération : on pose $\ell = n - k \iff k = n - \ell$.

Après un changement d'indice, le nombre de termes dans la somme doit rester inchangé !

Exemples :

E 1 –

$$\sum_{k=2}^{p} \frac{1}{k-1} = \sum_{\ell=1}^{p-1} \frac{1}{\ell} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1}$$

E 2 –

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell}$$

2.1.4 Sommes classiques

Théorème 3 *Somme des entiers, des carrés, des cubes*

Soit n un entier naturel. On a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}, \qquad \boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}, \qquad \boxed{\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

Démonstration :

1. • Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: "$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$".
   • Pour $n = 0$, vérifions que la propriété est vraie. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   • Soit $n \geqslant 0$. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, i.e. montrons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Alors
   $$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) \overset{\boxed{\text{HR}}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
   • Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.
2. • Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: "$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$".
   • Pour $n = 0$, vérifions que la propriété est vraie. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 = \frac{0(0+1)(0+1)}{6}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   • Soit $n \geqslant 0$. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, i.e. montrons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. Alors
   $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 &\overset{\boxed{\text{HR}}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left(n+1+\frac{n(2n+1)}{6}\right) \\ &= (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$
   • Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.
3. • Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: "$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$".
   • Pour $n = 0$, vérifions que la propriété est vraie. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0 = \frac{0^2(0+1)^2}{4}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   • Soit $n \geqslant 0$. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, i.e. montrons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$. Alors
   $$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{\boxed{\text{HR}}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$
   • Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Conséquence 4 ***Somme des termes d'une suite arithmétique***

Si (u_n) est une suite arithmétique, alors :

$$\boxed{u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_{n-1} + u_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{(u_p + u_n)(n-p+1)}{2}}$$

Remarque :

Schématiquement, on peut retenir la formule suivante pour la somme des termes d'une suite arithmétique :

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{(\text{1er terme } + \text{ Dernier terme}) \times (\text{Nombre de termes})}{2}}$$

Théorème 5 ***Somme des puissances***

Soit n un entier naturel et soit q un réel différent de 1. Alors :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

Démonstration :

- Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: "$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-a}$".
- Pour $n = 0$, vérifions que la propriété est vraie. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} q^k = 1 = \frac{1-q}{1-q}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, i.e. montrons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \overset{\boxed{\text{HR}}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

- Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Conséquence 6 ***Somme des termes d'une suite géométrique***

Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors :

$$\boxed{u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_{n-1} + u_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}}$$

Remarque :

Schématiquement, on peut retenir la formule suivante pour la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$:

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} u_k = (\text{1er terme}) \times \frac{1-(\text{raison})^{\text{Nombre de termes}}}{1-\text{raison}}}$$

2.2 Produits : symbole $\prod$

2.2.1 Produits

Définition 7

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$ des réels. on note leur produit $u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_p = \prod_{k=1}^{p} u_k$.

Un cas particulier, le produit $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ se note $n!$ et se prononce "**factorielle** n".

Remarques :

- **R 1** – Les règles de changements d'indices marchent de la même manière que pour les sommes. Par exemple, la variable k n'a de sens que dans le symbole $\prod$ et pas en dehors.
- **R 2** – Pour tous réels $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$, on a :

$$\prod_{k=0}^{n} (a_k b_k) = \prod_{k=0}^{n} a_k \times \prod_{k=0}^{n} b_k$$

- **R 3** – Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tous réels $a_0, \ldots, a_n$, on a :

$$\prod_{k=0}^{n} \lambda a_k = \lambda^{n+1} \prod_{k=0}^{n} a_k$$

- **R 4** – Pour $1 \leqslant p \leqslant n-1$, on a :

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = \prod_{k=0}^{p} a_k \times \prod_{k=p+1}^{n} a_k$$

2.2.2 Factorielles

Définition 8

Pour tout n entier, $n \geqslant 1$, on définit le nombre "**factorielle** n" par :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = \prod_{k=1}^{n} k$$

et par convention $0! = 1$

Exemples :

- **E 1** – $0! = 1$.
- **E 2** – $1! = 1$.
- **E 3** – $2! = 2 \times 1 = 2$.
- **E 4** – $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.
- **E 5** – $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Proposition 9

Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$n! = n \times (n-1)!$$

Remarque :

> Attention, que la formule
> $$n! = n \times (n-1)!$$
> n'est vrai que pour tout entier $n \geqslant 1$.
> Pour $n \geqslant 0$, on peut la réécrire par :
> $$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

2.2.3 Coefficients binomiaux

Définition 10

Pour tous entiers n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, on définit le **coefficient binomial "p parmi n"**, noté $\binom{n}{p}$ par :

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times \cdots \times 2 \times 1}}$$

Remarque :

> On peut aussi définir le coefficient binomial lorsque les entiers n et p ne vérifient pas $0 \leqslant p \leqslant n$: par convention on pose $\binom{n}{p} = 0$ dès que soit $n < 0$, soit $p < 0$, soit $n < p$

Proposition 11

- *Pour tout* $n \geqslant 0$, $\binom{n}{0} = 1$.
- *Pour tout* $n \geqslant 1$, $\binom{n}{1} = n$.
- *Pour tout* $n \geqslant 2$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- *Pour tout* $n \geqslant 1$, $\binom{n}{n-1} = n$.
- *Pour tout* $n \geqslant 1$, $\binom{n}{n} = 1$
- *Pour tous entiers* n *et* p *tels que* $0 \leqslant p \leqslant n$*, on a :*
$$\boxed{\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}}$$
- *Pour tous* n *et* p *tels que* $1 \leqslant p \leqslant n$*, on a :*
$$\boxed{p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}}$$

Démonstration :

Il suffit de remplacer avec les factorielles et de simplifier les expressions. Quelques exemples :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{0} &= \frac{n!}{0!\times n!} = \frac{1}{0!} = 1\\
\binom{n}{1} &= \frac{n!}{1!\times (n-1)!} = \frac{n\times (n-1)!}{(n-1)!} = n\\
\binom{n}{2} &= \frac{n!}{2!\times (n-2)!} = \frac{n(n-1)\times (n-2)!}{2!\times (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}\\
\binom{n}{n-p} &= \frac{n!}{(n-p)!\times (n-(n-p))!} = \frac{n!}{p!\times (n-p)!} = \binom{n}{p}\\
p\binom{n}{p} &= p\times \frac{n!}{p!\times (n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!} = n\times \frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} = n\binom{n-1}{p-1}
\end{aligned}$$

Théorème 12 ***Formule de Pascal***

Pour tous entiers n et p, on a :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Démonstration :

On a :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p+1}\right)\\
&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!} \times \frac{n+1}{(n-p)(p+1)} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = \binom{n+1}{p+1}
\end{aligned}$$

Remarque :

Cette formule nous aide à construire le **Triangle de Pascal** qui contient tous les coefficients binomiaux.

degré										
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$			
n	1	$\cdots$	$\binom{n}{p}$	$\binom{n}{p+1}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\ddots$		
$n+1$	1	$\cdots$		$\binom{n+1}{p+1}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\ddots$	

2.2.4 Formule du binôme de Newton

Théorème 13

Soient a et b deux nombres réels et n un entier. Alors

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

Démonstration :

Posons a et b deux réels. Démontrons la formule par récurrence sur n.

- Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{P}(n)$: "$(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$".
- $\underline{n=0}$. Alors $(a+b)^0 = 1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} a^0 b^{0-0}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- $\underline{\text{Soit } n \geqslant 0}$. Supposons la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons qu'alors la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie égalemement, autrement dit que $(a+b)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)\times(a+b)^n \overset{\boxed{\text{HR}}}{=} (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell=k+1}}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} a^\ell b^{n+1-\ell} + \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} a^\ell b^{n+1-\ell} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{\ell=1}^{n} \left(\binom{n}{\ell-1} + \binom{n}{\ell}\right) a^\ell b^{n+1-\ell} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n+1}{\ell} a^\ell b^{n+1-\ell} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} a^\ell b^{n+1-\ell}
\end{aligned}$$

  Ainsi, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
- Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

Remarque :

Cette formule généralise l'identité remarquable $(a+b)^2$ que l'on connaît déjà bien :

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5
\end{aligned}$$