CHAPITRE 1

Logique et raisonnement mathématique

1.1 Un peu de logique mathématique

1.1.1 Définitions, propriétés, propositions, théorèmes,...

Définition 1

Donner **une définition**, c'est nommer un objet ou un type d'objets.

Exemple :

Un triangle équilatéral est un triangle dont les trois côtés sont égaux.

Remarques :

R 1 – Il y a des définitions plus ou moins compliquées. Parfois, un livre de philosophie peut être entièrement consacré à définir une notion ...

R 2 – Définir quelque chose ne garantit pas forcément son existence.
Exemple : on appelle tricérapatte un mammifère à trois pattes.
Ainsi, quand on donne une définition, il faut en général vérifier qu'elle est pertinente. C'est d'ailleurs une partie du travail des mathématiciens de trouver des objets d'étude pertinents, et alors ils posent une définition.

Définition 2

Une **proposition** est un énoncé mathématique (une assertion) qui est soit VRAIE, soit FAUSSE.

Exemples :

E 1 – La proposition "$3 \geqslant 1$" est vraie.

E 2 – La proposition "$\sqrt{2} > 2$" est fausse.

E 3 – La proposition "Pour tout réel x, on a $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$" est vraie.

E 4 – La proposition "Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $2^n \geqslant n^2$".

Remarques :

R 1 – Quand on énonce une proposition, on sous-entend en général qu'elle est vraie.

R 2 – Parfois, une proposition est appelée autrement (en fonction du contexte, de l'importance du résultat) : **propriété**, **théorème**, **lemme** (petit théorème), **corollaire** (proposition découlant immédiatement d'un théorème),...

Définition 3
Un **prédicat** est un énoncé mathématique dépendant de variables $x, y, n, \dots$ tel que si l'on substitue à ces variables des objets d'un certain ensemble, on obtient une proposition.

Exemple :

Voici le prédicat suivant : $\mathcal{P}(x)$: "$e^x \geqslant 1$", qui dépend de la variable x.
Pour $x < 0$, $\mathcal{P}(x)$ est fausse, et pour $x \geqslant 0$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

Remarque :

Quand on formule un prédicat, il n'a de sens que si on a bien précisé qui sont les variables

Exemple :

"$\ln(x) \geqslant 0$" est vrai si $x \geqslant 1$, et n'a pas de sens si $x \in \mathbb{R}$"

1.1.2 Négation, disjonction, conjonction

Définition 4
Si P est une proposition, alors on note non(P) la proposition qui est vraie lorsque P est fausse, et qui est fausse lorsque P est vraie. C'est la **négation de la proposition** P.

Remarques :

R 1 – Pour toute proposition P, on a nécessairement soit P, soit non(P) qui est vraie. De plus, non(non(P)) $= P$.

R 2 – Attention, parfois l'intuition peut être source d'erreur lors de la négation de certaines phrases.
Par exemple, la négation de "Tout le monde est présent" n'est pas "Tout le monde est absent" !

Définition 5
Si P et Q sont deux proposition, on peut former la proposition **"P ou Q"**, qui est vraie si et seulement si <u>au moins l'une</u> des propositions P ou Q est vraie.
Autrement dit :, "P ou Q" est vraie si et seulement si <u>soit</u> P est vraie, <u>soit</u> Q est vraie, <u>soit</u> P et Q sont vraies.
De même, "P ou Q" est fausse si et seulement si P et Q sont toutes les deux fausses.

Exemples :

E 1 – La proposition "$\pi \geqslant 2$ ou $e \geqslant 1$" est vraie.

E 2 – Pour tout entier n, la proposition "n est pair ou n est impair" est une proposition vraie (c'est le cas de toute proposition de la forme P ou non(P)").

Définition 6

Si P et Q sont deux proposition, on peut former la proposition **"P et Q"**, qui est vraie si et seulement si les deux propositions P et Q sont simultanément vraies.
Autrement dit :, "P et Q" est vraie si et seulement si P est vraie et Q est vraie.
De même, "P et Q" est fausse dès que l'une des deux propositions P ou Q est fausse (ou les deux).

Exemples :

- **E 1** – La proposition "π n'est pas un entier et $\pi > 2$" est vraie.
- **E 2** – La proposition "la fonction exp est décroissante et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$" est fausse.

Proposition 7

La négation de "P et Q" est "non(P) ou non(Q)".
La négation de "P ou Q" est "non(P) et non(Q)".

Exemple :

La négation de "Tout le groupe est majeur et vacciné" est "Dans le groupe il existe des personnes qui sont mineures ou non vaccinées".

1.1.3 Implication, équivalence

Définition 8

Soient P et Q deux proposition. On peut alors former la proposition $(P \Rightarrow Q)$: "P **implique** Q".
Le fait que $(P \Rightarrow Q)$ est vraie signifie que : si P est vraie, alors Q est vraie.

Remarques :

- **R 1** – Affirmer que $(P \Rightarrow Q)$ est vraie ne signifie pas que P est vraie ou que Q est vraie, mais simplement que soit P et Q sont simultanément vraies, soit P est faux (et on ne peut rien dire sur Q).
- **R 2** – Si $(P \Rightarrow Q)$ est vraie, on dit que P est une **condition suffisante** pour avoir Q ("dès qu'on a P, on a Q"), et que Q est une **condition nécessaire** pour avoir P.
- **R 3** – Attention, $(P \Rightarrow Q)$ peut être vraie et $(Q \Rightarrow P)$ fausse : "si on veut avoir P, il faut forcément supposer Q vraie, mais cela ne suffit pas en général".

Exemple :

(Cette personne est en prépa) $\Rightarrow$ (Cette personne a obtenu son bac).
Si on croise une personne dans la rue, rien ne nous dit que l'une de ces propositions soit vraie.
Mais si la proposition (Cette personne est en prépa) est vraie, alors nécessairement on sait que (Cette personne a obtenu son bac) est vraie aussi. Inversement, si (Cette personne a obtenu son bac) est vraie, rien ne nous assure que cela soit suffisant pour que (Cette personne est en prépa).

Remarque :

Si P est fausse, alors l'implication $(P \Rightarrow Q)$ est toujours vraie, quelque soit la proposition Q.
Ceci a une conséquence importante : dans un raisonnement, si on veut prouver un résultat et si l'on part d'une hypothèse fausse, alors, même avec des raisonnements corrects, la preuve ne sera pas valable et aucun crédit ne pourra être apporté au résultat.

Proposition 9

La négation de $(P \Longrightarrow Q)$ est $(P$ et $\text{non}(Q))$.
Autrement dit, prouver que l'implication $(P \Longrightarrow Q)$ est fausse revient à montrer que (P vraie et Q fausse) est vraie.

Exemple :

Voici la phrase suivante : "s'il pleut, je prends mon parapluie".
Cela se traduit par l'implication suivante : (il pleut) $\Longrightarrow$ (je prends mon parapluie).
La négation de la phrase précédente est "Il pleut ET je ne prends pas mon parapluie".

Définition 10

L'implication $(P \Rightarrow Q)$ admet une **implication réciproque** qui est $(Q \Rightarrow P)$.
On dit que deux propositions P et Q sont **équivalentes** si on a, à la fois $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$. On note dans ce cas :

$$P \Longleftrightarrow Q$$

Remarques :

R 1 – Si $P \Longleftrightarrow Q$, les deux propositions sont alors simultanément vraies ou simultanément fausses

R 2 – On peut traduire $(P \Longleftrightarrow Q)$ par :
- "P est vraie si et seulement si Q est vraie".
- "P implique Q et réciproquement".
- "P est une condition nécessaire et suffisante pour que Q soit vraie".
- "Pour que Q soit vraie, il faut et il suffit que P soit vraie".

Exemples :

E 1 – $(x \leqslant y) \iff (x < y \text{ ou } x = y)$

E 2 – $(x^2 = 9) \iff (x = 3 \text{ ou } x = -3)$

E 3 – $(x^2 > 9 \text{ et } x \geqslant 0) \iff (x > 3)$.

Proposition 11

L'implication $(P \Longrightarrow Q)$ est équivalente à l'implication $(\text{non}(Q) \Longrightarrow \text{non}(P))$.
*On dit que l'implication $(\text{non}(Q) \Longrightarrow \text{non}(P))$ est la **contraposée** de $(P \Longrightarrow Q)$.*

Exemple :

La contraposée de "s'il pleut, j'ai mon parapluie" est "si je n'ai pas mon parapluie, il ne pleut pas"

1.1.4 Les quantificateurs mathématiques

Définition 12

Pour introduire des variables de manière synthétique, on utilise des symboles mathématiques :
- Un **quantificateur existentiel** "$\exists$", qui se lit "il existe (au moins) un" ou "pour au moins un".
- Un **quantificateur universel** "$\forall$", qui se lit "pour tout", "pour chaque", ou "quel que soit"

Remarques :

R 1 – On rencontre aussi parfois l'écriture "∃!" pour signifier l'existence et l'unicite : "il existe un unique", "il existe un et un seul"

R 2 – Lorsqu'on utilise un quantificateur existentiel, on suit souvent la phrase par un "tel que" qui est noté par un slash "/"

Exemples :

E 1 – (Tous les réels ont un carré positif) peut s'écrire : ($\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$)

E 2 – (La fonction f s'annule au moins une fois) peut s'écrire : ($\exists x \in \mathbb{R}\ /\ f(x) = 0$)

E 3 – (L'équation $x^3 + x + 1 = 0$ admet unique solution réelle) : ($\exists!\, x \in \mathbb{R}\ /\ x^3 + x + 1 = 0$).

Proposition 13

Soit E un ensemble et $P(x)$ un prédicat dépendant de x, où $x \in E$.
La négation de ($\forall x \in E,\ P(x)$) est ($\exists x \in E\ /\ non(P(x))$).
La négation de ($\exists x \in E,\ P(x)$) est ($\forall x \in E\ /\ non(P(x))$).

Exemples :

E 1 – La négation de "Tout le monde est présent" est "Il existe au moins un élève qui est absent".

E 2 – Si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, on dit que **les fonctions sont égales** et on note "$f = g$" si elles coincident en tout point :

$$(f = g) \iff (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x))$$

Deux fonctions f et g ne sont pas égales s'il existe au moins un élément x sur lequel elles diffèrent.

E 3 – Une suite (u_n) de réels est dite **croissante** si tous ses termes sont rangés dans l'ordre croissant :

$$((u_n) \text{ croissante}) \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}$$

E 4 – Une suite (u_n) de réels est dite **décroissante** si tous ses termes sont rangés dans l'ordre décroissant :

$$((u_n) \text{ décroissante}) \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n$$

E 5 – Une suite (u_n) de réels est dite **majorée** si tous ses termes sont inférieurs à une hauteur donnée :

$$((u_n) \text{ majorée}) \iff \exists M \in \mathbb{R}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$$

E 6 – Une suite (u_n) de réels est dite **minorée** si tous ses termes sont supérieurs à une hauteur donnée :

$$((u_n) \text{ majorée}) \iff \exists m \in \mathbb{R}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n$$

E 7 – Une suite (u_n) de réels est dite **bornée** si elle est majorée et minorée :

$$((u_n) \text{ bornée}) \iff \exists m \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R}\ /\ m \leqslant u_n \leqslant M$$

Remarque :

Attention, l'ordre des symboles mathématiques a une importance : les phrases

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}\ /\ x \leqslant y \qquad \text{et} \qquad \exists y \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant y$$

sont différentes ! La première est bien vraie, la seconde est fausse.

1.2 Raisonnement par récurrence

Proposition 14 ***Principe de récurrence***

Soit $(\mathcal{P}(n))$ un prédicat dépendant de l'entier naturel n.
Pour montrer que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, il suffit de démontrer que :
- *la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie (**initialisation**)*
- *pour n'importe quel entier $n \geqslant 0$ fixé, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie également (**hérédité**)*

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2}$.
Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Notons donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$: "$0 \leqslant u_n \leqslant 1$".
- Pour $n = 0$, vérifions que la propriété est vraie :
  On a par définition $u_0 = 0$, donc on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$: la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
  On sait que $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2}$. Puisqu'on a supposé que $u_n \geqslant 0$, alors u_{n+1} est le quotient de deux nombres positifs, donc est encore positif. De plus, on sait que $u_n + 1 \leqslant u_n + 2$, donc $\dfrac{u_n + 1}{u_n + 2} \leqslant 1$. On a donc bien que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
- Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Proposition 15 ***Principe de récurrence double***

Soit $(\mathcal{P}(n))$ un prédicat dépendant de l'entier naturel n.
Pour montrer que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, il suffit de démontrer que :
- *les propositions $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.*
- *pour n'importe quel entier $n \geqslant 0$, si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie également.*

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 2^n + 3^n$.

Notons donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$: "$0 \leqslant u_n \leqslant 1$".
- Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$, et également $2^0 + 3^0 = 1 + 1 + 2$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Pour $n = 1$, on a $u_1 = 5$, et également $2^1 + 3^1 = 2 + 3 + 5$: $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que les propriétés $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+2)$ est encore vraie.
  On a supposé que $u_n = 2^n + 3^n$ et que $u_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}$. Alors :
  $$u_{n+2} = 5\left(2^{n+1} + 3^{n+1}\right) - 6\left(2^n + 3^n\right) = 2^n\left(2 \times 5 - 6\right) + 3^n\left(3 \times 5 - 6\right) = 2^n \times 4 + 3^n \times 9 = 2^{n+2} + 3^{n+2}$$
  La propriété $\mathcal{P}(n+2)$ est encore vraie.
- Par récurrence double, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Proposition 16 ***Principe de récurrence forte***

Soit $(\mathcal{P}(n))$ une proposition dépendant de l'entier naturel n.
Pour montrer que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, il suffit de démontrer que :

- *la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.*
- *pour n'importe quel entier $n \geqslant 0$,*

$$\text{si } \mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(n) \text{ sont vraies, alors } \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie également}$$

1.3 Suites classiques

1.3.1 Suites arithmétiques

Définition 17

Une suite (u_n) de réels est dite **arithmétique** si $\boxed{\exists r \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r}$.
Le réel r est appelé la **raison** de la suite (u_n).

Proposition 18

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr}$

Remarque :

Si le premier terme de la suite est u_1, le résultat devient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = u_1 + (n-1)r}$.

1.3.2 Suites géométriques

Définition 19

Une suite (u_n) de réels est dite **géométrique** si $\boxed{\exists q \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n}$.
Le réel q est appelé la **raison** de la suite (u_n).

Proposition 20

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n}$

Remarque :

Si le premier terme de la suite est u_1, le résultat devient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = u_1 q^{n-1}}$.

1.3.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 21

Une suite (u_n) de réels est dite **arithmético-géométrique** si

$$\boxed{\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b}$$

Remarques :

R 1 – Une suite arithmétique est une suite arithmético-géométrique ($a = 1$ et $b = r$)

R 2 – Une suite géométrique est une suite arithmético-géométrique ($a = q$ et $b = 0$)

R 3 – Soit (u_n) est une suite arithmético-géométrique. Pour obtenir une forme explicite de chaque terme u_n, on applique la méthode suivante :

- On cherche (s'il existe) $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = a\ell + b$ (c'est le **point fixe**)
- Alors, la suite (v_n) définie par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \ell$$
est géométrique de raison a.
- On en déduit alors facilement une expression de v_n en fonction de n.
- On en déduit alors une expression de u_n en fonction de n.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$

La suite (u_n) est arithmético-géométrique.
Déterminons alors une formule explicite pour chaque terme u_n ($n \in \mathbb{N}$).

-
$$\ell = 2\ell - 3 \Longleftrightarrow \ell = 3$$
- On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - 3$. On a alors :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = (2u_n - 3) - 3 = 2u_n - 6 = 2(u_n - 3) = 2v_n$$
La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 2.
- On en déduit donc que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times 2^n = (u_0 - 3) \times 2^n = -2^n$.
- Puisqu'on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 + v_n$, on en déduit donc finalement que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 - 2^n$$