

Séries numériques

20.1 Généralités sur les séries

20.1.1 Définitions

Définition 1

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la **somme partielle d'indice n** associée à la suite (u_n) : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

On appelle alors **série de terme général u_n** , et on note $\sum_{n \geq 0} u_n$ la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ de ces sommes partielles.

Définition 2

- On dit que **la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge** si la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

La limite de cette suite est alors appelée la **somme de la série**, qu'on note : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n}$.

- Si la série ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Définition 3

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, on appelle pour tout $n \in \mathbb{N}$, le **reste d'indice n** R_n :

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Remarques :

R1 – Déterminer la nature d'une série signifie qu'il faut déterminer si la série est convergente ou divergente.

R2 – Si la série est convergente, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n + R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

R3 – Si la série est convergente, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$$

$$\text{puisque } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

R4 – Il ne faut pas confondre les différents éléments de l'étude d'une série :

- u_n : la suite de base, le "terme général" de la série
- S_n : la somme partielle des u_k : c'est $u_0 + u_1 + \dots + u_n$
- $\sum_{n \geq 0}^{+\infty} u_n$: c'est la série, c'est la suite (S_n)
- $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$: c'est la somme de la série, la limite de (S_n) si elle existe.

R5 – Puisque $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ et $S_{n-1} = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$, on a

$$\forall n \geq 1, u_n = S_n - S_{n-1}$$

Exemple :

Soit q un réel quelconque. Soit (u_n) la suite géométrique définie par

$$u_n = q^n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle de la suite (u_n) est égale à

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Regardons si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, i.e. si la suite des sommes partielles (S_n) admet une limite.

- Si $q = 1$, on a

$$S_n = n + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc dans ce cas là, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge dans le cas où $q = 1$.

- Si $q = -1$, on a

$$S_n = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{1 - (-1)} = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} ?$$

donc dans ce cas là, (S_n) n'admet pas de limite, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge dans le cas où $q = -1$

- Si $q > 1$, on a

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

puisque $-q^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ et $1 - q < 0$, donc dans ce cas là, (S_n) diverge, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge dans le cas où $q > 1$.

- Si $q < -1$, on a

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} ?$$

donc dans ce cas là, (S_n) n'admet pas de limite, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge dans le cas où $q < -1$

- Si $-1 < q < 1$, on a

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{1 - q}$$

puisque $q^{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$. Donc dans ce cas là, (S_n) converge et admet pour limite $\frac{1}{1 - q}$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge dans le cas où $-1 < q < 1$ et dans ce cas là

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}}$$

20.1.2 Propriétés

Proposition 4

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors la suite (u_n) converge nécessairement vers 0.

Démonstration :

On a dit précédemment que

$$\forall n \geq 1, u_n = S_n - S_{n-1}$$

Si la série converge, cela veut dire que la suite (S_n) converge. Notons par exemple ℓ la limite de la suite (S_n) . On a alors :

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \ell, \quad S_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \ell$$

et donc

$$u_n = S_n - S_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \ell - \ell = 0$$

Remarques :

R1 – On utilise souvent cette propriété dans le sens inverse :

SI (u_n) ne converge pas vers 0, ALORS la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge

R2 – La réciproque de cette propriété est FAUSSE.

Si la suite (u_n) converge vers 0, on ne peut pas affirmer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Exemple :

Montrons que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Notons pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Il s'agit de montrer que la suite (S_n) diverge.

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur \mathbb{R}^{+*} .

Si on se fixe un entier $k \geq 1$, on a donc

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k}$$

et même pour tout $t \in [k, k+1]$, on a

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

On a donc

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt$$

autrement dit

$$\frac{1}{k+1} (k+1-k) \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} (k+1-k)$$

i.e.

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$$

Soit $n \geq 1$. Puisqu'on a pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$, on en déduit que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^n \left(\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Or, $\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt = \int_1^2 \frac{dt}{t} + \int_2^3 \frac{dt}{t} + \dots + \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t}$ d'après la relation de Chasles.

De plus $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{\ell=2}^{n+1} \frac{1}{\ell} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{1}{\ell} - 1$.

On a donc montré que pour tout $n \geq 1$,

$$S_{n+1} - 1 \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq S_n$$

autrement dit

$$S_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq S_n$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$. On en déduit par comparaison que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$, ainsi la suite (S_n) diverge vers $+\infty$. La série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n}$ diverge donc.

20.1.3 Opérations sur les séries convergentes

Proposition 5

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries.

1. Pour tout réel λ non nul, les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} \lambda u_n$ sont de même nature. De plus, si les séries convergent, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

2. Si les deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont convergentes, alors la série $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ est convergente également et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Remarque :

La réciproque de la deuxième propriété est fautive !

On peut avoir $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ qui converge, sans que $\sum_{n \geq 0} u_n$ ni $\sum_{n \geq 0} v_n$ ne convergent.

20.1.4 Liens entre suite et série

Proposition 6

Soit (u_n) une suite réelle, alors : (u_n) converge $\iff \sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge. De plus, en cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - u_0)$$

Démonstration :

\implies Supposons que la suite (u_n) converge. Calculons la somme partielle d'indice n de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$$

Comme la suite (u_n) converge, disons vers $\ell \in \mathbb{R}$, on a $u_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$. Ainsi

$$S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell - u_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \longrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - u_0)$$

Ainsi la série converge bien et sa somme vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - u_0)$.

\impliedby Supposons que la série $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge, autrement dit la somme partielle de la série converge vers un réel ℓ' . Or,

$$S_n = \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$$

autrement dit,

$$u_{n+1} = S_n + u_0 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell' + u_0$$

Ainsi, la suite (u_n) converge bien.

20.2 Critères de convergence pour les séries à termes positifs

Dans toute cette partie, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est à termes positifs, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

20.2.1 Sommes partielles

Proposition 7

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes positifs. Alors la suite des sommes partielles est une suite croissante.

Démonstration :

En effet, si on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0,$$

donc la suite (S_n) est bien croissante.

Théorème 8

Une série à termes positifs est convergente si et seulement si ses sommes partielles sont majorées. Si la série diverge, alors elle diverge nécessairement vers $+\infty$.

20.2.2 Théorèmes de comparaison

Théorème 9

Théorème de comparaison

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries telles qu'à partir d'un certain rang, on ait

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

Alors :

- Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Théorème 10

Théorème de négligeabilité

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs, telles qu'on ait

$$u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$$

Alors :

- Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Théorème 11*Théorème d'équivalence*

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs, telles qu'on ait

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$$

Alors les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature.

20.2.3 Convergence absolue

Dans ce paragraphe, on n'impose plus à ce que la suite (u_n) soit positive.

Définition 12

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série. On dit que la série **converge absolument** si la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ est convergente.

Théorème 13

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes quelconques.

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente, ALORS, elle est aussi convergente.

Démonstration :

En effet, si on regarde les sommes partielles : on sait d'après l'inégalité triangulaire que :

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |u_k|$$

Alors, si le terme de droite converge lorsque $n \rightarrow +\infty$ (i.e. la série converge absolument), alors le terme de gauche sera majoré, donc la série ne va pas diverger.

Remarques :

R1 – La réciproque est fautive, ici également.

Par exemple, dans l'exercice 03.3, nous avons montré que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ convergeait.

Or, $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

On peut donc avoir des séries convergentes, qui ne convergent pas absolument.

R2 – Si une série $\sum u_n$ n'est pas de signe constant, alors on regarde $\sum |u_n|$ qui elle, est une série à termes positifs : on peut appliquer les critères de comparaison.

Si cette série $\sum |u_n|$ converge, alors on peut dire que $\sum u_n$ converge.

Si cette série $\sum |u_n|$ diverge, alors on ne peut a priori rien dire sur $\sum u_n$

20.3 Séries usuelles et sommes à connaître

20.3.1 Séries géométriques et dérivées

Théorème 14

Soit $q \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geq 0} q^n$ s'appelle la **série géométrique de raison q** .

Cette série converge si et seulement si $|q| < 1$ et : $\forall q \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Proposition 15

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- La série $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ s'appelle la **série géométrique dérivée première de raison q** .

Cette série converge si et seulement si $|q| < 1$ et : $\forall q \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

- La série $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ s'appelle la **série géométrique dérivée seconde de raison q** .

Cette série converge si et seulement si $|q| < 1$ et : $\forall q \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

20.3.2 Séries exponentielles

Théorème 16

Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Alors la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

20.3.3 Séries de Riemann

Théorème 17

Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque. Alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée la **série de Riemann d'ordre α** . Alors

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

En particulier, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ appelée la **série harmonique**, diverge.

En particulier, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (vers $\frac{\pi^2}{6}$...)