CHAPITRE 19

Intégrales impropres

19.1 Intégrales impropres

Définition 1

On appelle **intégrale impropre** toute intégrale du type $\int_a^b f(t)dt$ lorsque $a, b \in \mathbb{R}\{\pm\infty\}$ et si f est continue sur $]a, b[$ mais peut-être pas en a et/ou b.

Exemples :

E 1 – L'intégrale $\int_0^1 \ln(t)dt$ est impropre : la fonction ln est continue sur $]0, 1]$: on a un problème en 0.

E 2 – L'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-2t}dt$ est impropre : la fonction $t \mapsto e^{2-t}$ est continue sur $]1, +\infty[$: on a un problème en $+\infty$.

E 3 – L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est impropre : la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$: on a des problèmes en $+\infty$ et en $-\infty$.

E 4 – L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t(1-t)}dt$ est impropre : la fonction $t \mapsto \frac{1}{t(1-t)}$ est continue sur $]0, 1[$: on a des problèmes en 0 et en 1.

Remarques :

R 1 – Lorsque f est continue sur le segment $[a, b]$, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ existe bien par définition, elle n'est pas impropre.

R 2 – Lorsqu'une intégrale est impropre, rien ne nous assure de son existence. Dans les exemples ci-dessus, les trois premières intégrales convergent bien (cf plus tard) mais la quatrième n'est pas calculable.

19.1.1 Intégration sur un intervalle $[a, b[$ ou $]a, b]$

Définition 2

Soient $a < b$ deux réels. Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b[$.
Si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ (i.e. la primitive de f qui s'annule en a) admet une limite finie lorsque x tend vers b^-, on dit que :

- **l'intégrale de f sur $[a, b[$ converge**,
- **l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente**,
- **f est intégrable sur $[a, b[$**,

et on pose

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt$$

Remarque :

De la même manière, lorsque f est continue par morceaux sur $]a, b]$, $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)dt$ lorsque cette limite existe

Exemples :

E 1 – **Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^1 \ln(t)dt$?**

La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$: l'intégrale est impropre, on a un problème en 0.
Pour tout $x \in]0, 1]$, on a :

$$\int_x^1 \ln(t)dt = \Big[t\ln(t) - t\Big]_x^1 = -1 - x\ln(x) + x$$

Donc

$$\lim_{x \to 0} \int_x^1 \ln(t)dt = \lim_{x \to 0} (-1 - x\ln(x) + x) = -1$$

Donc l'intégrale $\int_0^1 \ln(t)dt$ est convergente et

$$\int_0^1 \ln(t)dt = -1$$

E 2 – **Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t}dt$?**

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $]0, 1]$, l'intégrale est impropre, on a un problème en 0.
Pour tout $x \in]0, 1]$, on a :

$$\int_x^1 \frac{1}{t}dt = \Big[\ln(t)\Big]_x^1 = -\ln(x)$$

Donc

$$\lim_{x \to 0} \int_x^1 \frac{1}{t}dt = \lim_{x \to 0} (-\ln(x)) = +\infty$$

Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ ne converge pas, on dit qu'elle est **divergente**.

Proposition 3

Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ telle que f soit prolongeable par continuité en b (i.e. f admet une limite finie en b^-). Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge. On dit que l'intégrale est alors ***faussement impropre****.*

Exemple :

Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt$?

La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$, elle est impropre : on a un problème a priori en 0. Or, on sait que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

donc on peut prolonger la fonction f par continuité en posant $f(0) = 1$.
Ainsi, il n'y a en fait pas de problème car on a l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.
Ainsi, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt$ est convergente.

19.1.2 Intégration sur un intervalle $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,a]$

Définition 4

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a,+\infty[$.
Si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ (i.e. la primitive de f qui s'annule en a) admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, on dit que :

- **l'intégrale de f sur $[a,+\infty[$ converge**,
- **l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente**,
- **f est intégrable sur $[a,+\infty[$**,

et on pose

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$$

Remarque :

On définit de la même façon l'intégrale $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ lorsqu'elle existe.

Exemples :

E1 – **Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$?**

La fonction $f : t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc on a un problème a priori seulement en $+\infty$.

Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a $\int_0^x e^{-t}dt = \Big[-e^{-t}\Big]_0^x = 1 - e^{-x}$.

Donc : $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty} (1 - e^{-x}) = 1$.

Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1}$$

E 2 – **Quelle est la nature de l'intégrale** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ **?**

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc on a un problème a priori seulement en $+\infty$.

Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a : $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt = \Big[\ln(t)\Big]_1^x = \ln(x)$. Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}dt = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ est divergente.

19.1.3 Intégration sur un intervalle quelconque

Définition 5

Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soit f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$.

On pose $c \in]a, b[$. Si les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ sont convergentes, alors on dit que :

- l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente
- f est intégrable sur $]a, b[$

et on pose

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Exemple :

Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ **?**

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}dt$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc on a un problème a priori en $-\infty$ et en $+\infty$.

1. Montrons déjà que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ converge.

   Pour tout $x \geqslant 0$, on a : $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \Big[\text{Arctan}(t)\Big]_0^x = \text{Arctan}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.

   Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ converge bien et on a de plus $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$.

2. Montrons ensuite que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}dt$ converge.

   Pour tout $x \leqslant 0$, on a : $\displaystyle\int_x^0 \frac{1}{1+t^2}dt = \Big[\text{Arctan}(t)\Big]_x^0 = -\text{Arctan}(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

   Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}dt$ converge bien et on a de plus $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$.

Finalement, par somme d'intégrales convergentes, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ converge bien et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

19.1.4 Intégration par parties, changement de variable

Remarques :

R 1 – On peut utiliser sur des segments uniquement les règles de calcul connues : intégration par parties, changement de variable.

R 2 – Par exemple, on n'utilise jamais de notation :

$$\int_a^{+\infty} u'(t)v(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u(t)v'(t)dt$$

Ceci n'a pas de sens, notamment le terme entre crochets : toujours avoir des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur un segment.

R 3 – Pour un changement de variable, la fonction φ du changement de variable doit être de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment. Si on a un problème à cause d'une borne, il faut se placer sur un segment plus petit puis faire tendre les bornes vers celles que l'on souhaite avoir.

Exemples :

E 1 – **Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} te^{-2t}dt$ et calculer cette intégrale.**

La fonction $t \mapsto te^{-2t}$ est continue sur $[0, +\infty[$, on a donc un problème uniquement en $+\infty$.

Pour tout $x > 0$, calculons $\int_0^x te^{-2t}dt$ et pour cela, faisons une intégration par parties.

On pose pour tout $t \in [0, x]$, $\left| \begin{array}{l} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-2t} \end{array} \right.$ et $\left| \begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} \end{array} \right.$.

Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, x]$, donc on peut intégrer par parties :

$$\int_0^x te^{-2t}dt = \left[-\frac{1}{2}te^{-2t}\right]_0^x - \int_0^x \left(-\frac{1}{2}e^{-2t}\right) dt = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x}$$

D'où par somme de limites (par croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-2x} = 0$), on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\int_0^x te^{-2t}dt\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x}\right) = \frac{1}{4}$$

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-2t}dt$ converge bien et vaut $\frac{1}{4}$.

E 2 – **Par un changement de variable $u = \sqrt{x}$, calculer $\int_0^{+\infty} e^{-2\sqrt{x}}dx$.**

La fonction $x \mapsto e^{-2\sqrt{x}}$ est continue sur $[0, +\infty[$: on a donc a priori un problème uniquement en $+\infty$.

Posons A et B deux réels de $]0, +\infty[$, et calculons $\int_A^B e^{-2\sqrt{x}}dx$.

La fonction φ définie par $\forall x \in [A, B], \varphi(x) = \sqrt{x}$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[A, B]$ et on a $\forall x \in [A, B], \varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

On a :

$$\int_A^B e^{\sqrt{x}}dx = \int_A^B 2\sqrt{x}e^{-2\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right) = 2\int_A^B \varphi(x)e^{-2\varphi(x)}\varphi'(x)dx = 2\int_{\varphi(A)}^{\varphi(B)} ue^{-2u}du = 2\int_{\sqrt{A}}^{\sqrt{B}} ue^{-2u}du$$

et donc, puisqu'on a montré que l'intégrale $\int_0^{+\infty} ue^{-2u}du$ converge bien, on a :

$$\lim_{\substack{A\to0 \\ B\to+\infty}} \int_A^B e^{\sqrt{x}}dx = 2\int_0^{+\infty} ue^{-2u}du = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

19.1.5 Propriétés sur les intégrales convergentes

Théorème 6 ***Linéarité des intégrales convergentes***

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I =]a,b[$ ou $[a,b[$ ou $]a,b]$.

1. *Si les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent,*
   Alors pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_a^b (\lambda_1 f(t) + \lambda_3 g(t))dt$ converge et :
$$\int_a^b (\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t))dt = \lambda_1 \int_a^b f(t)dt + \lambda_2 \int_a^b g(t)dt$$
2. *Si $\int_a^b f(t)dt$ converge et si $\int_a^b g(t)dt$ diverge, alors $\int_a^b (f(t)+g(t))dt$ diverge.*

Remarque :

ATTENTION : on peut donc toujours "regrouper" deux intégrales convergentes, mais on ne peut pas forcément "séparer" une intégrale convergente.

Par exemple, on peut montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t)}dt$ converge. De plus, on a :
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t)}dt = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right) dt$$
Mais ON NE PEUT PAS séparer l'intégrale de la somme en somme des intégrales, en effet, les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t}dt$ divergent : cela n'aurait aucun sens.

Théorème 7 ***Positivité de l'intégrale convergente***

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b[$ (ou $]a,b]$ ou $]a,b[$) avec $a < b$..
Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Théorème 8 ***Positivité de l'intégrale convergente***

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b[$ (ou $]a,b]$ ou $]a,b[$) avec $a < b$..
Si :

- *$\forall t \in [a,b[$ (ou $]a,b]$ ou $]a,b[$), $f(t) \leqslant g(t)$.*
- *les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent*

Alors
$$\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$$

Remarque :

Il faut toujours bien s'assurer de la convergence des intégrales avant de "passer à l'intégrale" dans une inégalité

Théorème 9 ***Fonction continue positive d'intégrale nulle***

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b[$ (ou $]a,b]$ ou $]a,b[$) avec $a < b$..
Si $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors $\forall t \in [a,b[$ (ou $]a,b]$ ou $]a,b[$), $f(t) = 0$.

19.2 Critères de convergence

19.2.1 Intégrales de référence

Théorème 10 ***Intégrales de Riemann***

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt \begin{cases} \textit{converge pour } \alpha < 1 \\ \textit{diverge pour } \alpha \geqslant 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt \begin{cases} \textit{converge pour } \alpha > 1 \\ \textit{diverge pour } \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

Démonstration :

- Pour $\alpha = 1$, on a déjà vu que $\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ ne converge pas.
- Pour $\alpha \neq 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0, 1]$. On considère $x \in]0, 1[$. Alors

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}dt = \left[-\frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}\right]_x^1 = \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha-1}$$

  Donc cette quantité admet une limite finie lorsque $x \to 0$ si et seulement si $\alpha - 1 < 0$, c'est-à-dire si $\alpha < 1$.
- Pour $\alpha = 1$, on a déjà vu que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ ne converge pas.
- Pour $\alpha \neq 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0, 1]$. On considère $x > 1$. Alors

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}dt = \left[-\frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$$

  Donc cette quantité admet une limite finie lorsque $x \to +\infty$ si et seulement si $\alpha - 1 > 0$, c'est-à-dire si $\alpha > 1$.

Théorème 11 ***Intégrales d'exponentielle négative***

Pour tout réel a, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}dt \textit{ converge} \iff a > 0$$

et pour tout $a > 0$, on a : $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-at}dt = \frac{1}{a}}$.

Démonstration :

Soit a un réel. La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est continue sur $[0, +\infty[$: problème uniquement en $+\infty$.

Si $a = 0$, la fonction est constante égale à 1 et l'intégrale diverge grossièrement.

Si $a \neq 0$, alors on a pour tout $x > 0$:

$$\int_0^x e^{-at}dt = \left[-\frac{1}{a}e^{-at}\right]_0^x = \frac{1}{a} - \frac{1}{a}e^{-ax}$$

Si $a < 0$, on a $\lim_{x\to+\infty} e^{-ax} = +\infty$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}dt$ diverge donc.

Si $a > 0$, on a $\lim_{x\to+\infty} e^{-ax} = 0$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}dt$ converge donc et vaut $\frac{1}{a}$.

19.2.2 Critères de convergence pour les fonctions positives

Théorème 12 ***Critère de comparaison pour les fonctions positives***

Soient $a < b$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, b[$ telles que $\forall t \in [a, b[, \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$.

- *Si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.*
- *Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.*

Exemple :

Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1}dt$?

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^2+t+1}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc on a un problème a priori seulement en $+\infty$.
Pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{t^2+t+1} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemann qui converge, donc d'après les critères de convergence sur les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1}dt$ converge.
Par ailleurs, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1}dt$ est convergente puisque la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2+t+1}$ est continue sur $[0, 1]$.
En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1}dt$ est une intégrale convergente.

Théorème 13 ***Critère de négligeabilité pour les fonctions positives***

Soient $a < b$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, b[$ telles que $f(t) \underset{t \to b^-}{=} o(g(t))$.

- *Si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.*
- *Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.*

Exemple :

Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$?

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, on a donc un problème uniquement en $+\infty$.
De plus, on a par croissances comparées :

$$t^2 e^{-t^2} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \Longrightarrow \qquad e^{t^2} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Or, on sait que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann), donc critère de négligeabilité des fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge bien. Enfin, puisque $t \mapsto e^{-t^2}dt$ est bien continue sur $[0, 1]$, on a même que l'intégrale $\int_0^1 e^{-t^2}dt$ qui converge bien également et par somme $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.

Théorème 14 ***Critère d'équivalence pour les fonctions positives***

Soient $a < b$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, b[$ telles que

$$f(t) \underset{t \to b^-}{\sim} g(t)$$

Alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Exemple :

Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^2 - 5t + 7}{(t+1)(4t^2 - t + 2)} dt$?

La fonction $f : t \mapsto \frac{t^2 - 5t + 7}{(t+1)(4t^2 - t + 2)}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (c'est une fraction rationnelle et le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$), donc on a un problème a priori seulement en $+\infty$.
Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{t^2 - 5t + 7}{(t+1)(4t^2 - t + 2)} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{t^2}{4t^3} = \frac{1}{4t}$$

Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{4t} dt$ est une intégrale de Riemann qui diverge, donc d'après les critères d'équivalence sur les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t^2 - 5t + 7}{(t+1)(4t^2 - t + 2)} dt$ diverge.
En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^2 - 5t + 7}{(t+1)(4t^2 - t + 2)} dt$ est une intégrale divergente.

Remarque :

Les critères de comparaison/négligabilité/équivalence peuvent permettre de s'assurer qu'une intégrale converge bien et qu'elle a un sens, mais cela ne nous suffit pas pour éventuellement calculer la dite intégrale.

Si on nous demande de calculer une intégrale impropre, la seule méthode est de passer par les intégrales partielles (poser un $x \in [a, b[$, calculer, puis faire tendre x vers b)

19.2.3 Intégrales absolument convergentes

Définition 15

Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soit f une fonction continue sur $]a, b[$.
On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente.

Théorème 16 ***ACV ⇒ CV***

Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente, Alors l'intégrale est convergente.
En cas de convergence absolue et si $a < b$, on a alors ***l'inégalité triangulaire*** *:*

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt}$$

Remarque :

La réciproque est fausse ! On peut avoir $\int_a^b f(t)dt$ qui converge et $\int_a^b |f(t)|dt$ qui diverge.

Démonstration :

Rédigeons la preuve dans le cas où f est continue sur $[a, b[$.

Supposons que l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\, dt$ converge.

On a pour tout $t \in [a, b[$, $f(t) = (f(t) + |f(t)|) - |f(t)| = g(t) - |f(t)|$ en posant $g(t) = f(t) + |f(t)|$.

Remarquons que pour tout $t \in [a, b[$:
- si $f(t) \geqslant 0$, alors $g(t) = f(t) + |f(t)| = |f(t)| + |f(t)| = 2|f(t)| \geqslant 0$.
- si $f(t) \leqslant 0$, alors $g(t) = f(t) + |f(t)| = f(t) - f(t) = 0 \geqslant 0$.

La fonction g est donc toujours positive et on a $\forall t \in [a, b[,\ 0 \leqslant g(t) \leqslant 2|f(t)|$.

Puisque l'intégrale $\int_a^b 2|f(t)|dt$ converge, par critère de comparaison des fonctions positives, l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge également.

Enfin, puisque $f(t) = g(t) - |f(t)|$ et que les intégrales $\int_a^b g(t)dt$ et $\int_a^b |f(t)|dt$ convergent, par linéarité des intégrales convergentes, on a bien que $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Exemple :

Montrons que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ converge.

La fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$: on a un problème uniquement en $+\infty$. De plus, la fonction n'est pas de signe constant : regardons donc son absolue convergence.

Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$, donc par critère de comparaison des fonctions positives, sachant que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge (Riemann), on en déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| dt$ converge.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ est donc absolument convergente, donc convergente.