CHAPITRE 17

Matrices d'applications linéaires

17.1 Représentation matricielle d'un vecteur dans une base

17.1.1 Coordonnées d'un vecteur dans une base

Définition 1

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Une famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est une **base de E** si :

- la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est libre :

$$\text{si } \lambda_1\overrightarrow{e_1} + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n\overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0}, \qquad \text{alors } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

- la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est génératrice de E :

$$E = Vect(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$$

Théorème 2

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E. Alors tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de E s'écrit de manière unique :

$$\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \dots + x_n\overrightarrow{e_n}$$

où $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des coefficients (des scalaires) appelés les ***coordonnées du vecteur $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathcal{B}$****. On peut alors définir la matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ par :*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

La matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ représente donc le vecteur $\overrightarrow{x} \in E$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exemples :

E 1 – Prenons $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ où :

$$\overrightarrow{e_1} = (1,0,0), \qquad \overrightarrow{e_2} = (0,1,0), \qquad \overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$$

Prenons par exemple le vecteur $\overrightarrow{x} = (1,-2,3)$. On a :

$$\overrightarrow{x} = (1,-2,3) = 1 \times (1,0,0) - 2 \times (0,1,0) + 3 \times (0,0,1) = 1\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}$$

Ainsi, la matrice X représentant le vecteur $\overrightarrow{x}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

E 2 – Un vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est toujours représenté par $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans <u>la base canonique</u>.

E 3 – Prenons toujours $E = \mathbb{R}^3$ et notons :

$$\overrightarrow{u} = (1,0,0), \qquad \overrightarrow{v} = (1,1,0), \qquad \overrightarrow{w} = (1,1,1)$$

On peut montrer facilement que la famille $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Prenons toujours le vecteur $\overrightarrow{x} = (1,-2,3)$. On cherche les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathcal{B}'$. :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} &\iff (1,-2,3) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1) \\
&\iff (1,-2,3) = (a+b+c, b+c, c) \\
&\iff \begin{cases} a+b+c &= 1 \\ \quad\; b+c &= -2 \\ \qquad\;\; c &= 3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\overrightarrow{x} = 3\overrightarrow{u} - 5\overrightarrow{v} + 3\overrightarrow{w}$$

et la matrice X' représentant le vecteur $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathcal{B}'$ est donc :

$$X' = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Remarquons que pour le même vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$, on a trouvé plusieurs matrices le représentant : la matrice dépend de la base que l'on choisit.

E 4 – Plaçons-nous dans $E = \mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$, muni de sa base canonique :

$$\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3, \dots, X^n)$$

Prenons par exemple le polynôme $P(X) = X^n + 2X - 1$. On a :

$$P(X) = -1 \times 1 + 2 \times X + 0 \times X^2 + 0 \times X^3 + \cdots + 0 \times X^{n-1} + 1 \times X^n$$

Ainsi, la matrice X représentant le polynôme P dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

E 5 – Un polynôme $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est toujours représenté par $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ dans <u>la base canonique</u>.

E 6 – Plaçons-nous dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3.
La famille de polynômes $\mathcal{B}' = (1, X-1, (X+2)^2)$ est une base de E (puisque c'est une famille de polynômes non nuls échelonnés en degrés, donc famille libre, de 3 éléments, donc une base de E).

Notons $P(X) = 3X^2 - 2X + 1$. Dans la base canonique, P est représenté par $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Dans la base $\mathcal{B}'$?

$$\begin{aligned}
P(X) = a1 + b(X-1) + c(X-2)^2 &\iff 3X^2 - 2X + 1 = a + bX - b + cX^2 - 4cX + 4c \\
&\iff 3X^2 - 2X + 1 = cX^2 + (b - 4c)X + (4c - b + a) \\
&\iff \begin{cases} \phantom{a - b + {}} c &= 3 \\ \phantom{a - {}} b - 4c &= -2 \\ a - b + 4c &= 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 10 \\ c = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$P(X) = 3 + 10(X-1) + 3(X-2)^2$$

et P est ainsi représenté par $X' = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

17.1.2 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 3

Soient $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p}$, p vecteurs dans un espace vectoriel E.
On appelle **rang de la famille** $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p})$: $\boxed{\mathrm{rg}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p}) = \dim\left(Vect\left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p}\right)\right)}$, autrement dit c'est le cardinal de la plus grande famille libre qu'on peut former avec les vecteurs de la famille $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p})$.

Remarques :

R 1 – On ne change pas le rang d'une famille de vecteurs lorsque l'on fait des opérations élémentaires (celles qui sont autorisées) sur les vecteurs, puisque cela ne modifie pas le Vect :
- on peut échanger $\overrightarrow{x_i}$ et $\overrightarrow{x_j}$
- on peut remplacer $\overrightarrow{x_i}$ par $\alpha\overrightarrow{x_i} + \beta\overrightarrow{x_j}$ avec $\underline{\alpha \neq 0}$ et β quelconque.

R 2 – Si $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p}$ sont p vecteurs dans un espace vectoriel E de dimension n. On a nécessairement $\mathrm{rg}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p}) \leqslant p$ et $\mathrm{rg}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p}) \leqslant n$, autrement dit :

$$0 \leqslant \mathrm{rg}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_p}) \leqslant \min(n, p)$$

17.2 Représentation matricielle d'une application linéaire

17.2.1 Caractérisation d'une A.L. par l'image d'une base

Exemple :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.
Notons $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de E et notons $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ une base de F.
Soit f une application linéaire de E dans F telle que :

$$f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{u_1} - 2\overrightarrow{u_2}, \qquad f(\overrightarrow{e_2}) = 3\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}, \qquad f(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$$

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de E qui a pour coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$, i.e. $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{v}) &= f(x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}) \\ &= xf(\overrightarrow{e_1}) + yf(\overrightarrow{e_2}) + zf(\overrightarrow{e_3}) \quad \text{(car } f \text{ linéaire)} \\ &= x(\overrightarrow{u_1} - 2\overrightarrow{u_2}) + y(3\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}) + z(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}) \\ &= (x + 3y + z)\overrightarrow{u_1} + (-2x + y + z)\overrightarrow{u_2} \end{aligned}$$

On a donc :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + 3y + z, -2x + y + z) \end{array}$$

Proposition 4 ***Caractérisation d'une A.L. par l'image d'une base***

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.
Pour caractériser une application linéaire f de E dans F, il faut et il suffit de connaître l'image d'une base de E par f.

17.2.2 Matrice associée à une application linéaire

Définition 5 **Matrice d'une application linéaire**

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E et soit $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ une base de F.
La **matrice de l'application linéaire f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$** est la matrice dont les colonnes représentent les vecteurs $f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \dots, f(\overrightarrow{e_p})$ exprimés dans la base $\mathcal{B}'$.

$$mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & \cdots & f(\overrightarrow{e_p}) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \overrightarrow{u_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{u_n} \end{array}$$

Remarques :

R 1 – Avec les notations précédentes, on a donc :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad f(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \overrightarrow{u_i}$$

R 2 – La matrice d'une application linéaire dans des bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de F est unique.
Autrement dit, deux applications linéaires f et g de $\mathcal{L}(E, F)$ sont égales si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{B}'$ de F telle que :

$$mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$$

R 3 – La matrice d'un endomorphisme est une matrice carrée.

Définition 6 **Matrice d'un endomorphisme**

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et que $\mathcal{B}$ est une base de E, alors, la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ (même base de départ et d'arrivée), est notée tout simplement :

$$mat_{\mathcal{B}}(f)$$

c'est la **matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$** :

$$mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & \cdots & f(\overrightarrow{e_n}) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{e_n} \end{array}$$

Définition 7 **Application linéaire canoniquement associée à une matrice**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice de n lignes et p colonnes.
Alors il existe une unique application linéaire f qui va de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ qui est représentée par la matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.
C'est l'**application linéaire canoniquement associée à A**

Théorème 8 ***Comb.linéaire des A.L. - C.L. des matrices***

Soient E un espace vectoriel de dimension p et F un espace vectoriel de dimension n. Notons $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F.
L'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, on en déduit que :

$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p$$

Remarque :

Le théorème précédent nous donne en particulier que pour toutes applications linéaires $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f + g) = \lambda \times mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$$

Une combinaison linéaire d'applications linéaires est donc représentée par la combinaison linéaire des matrices correspondantes.

Proposition 9 ***Composée des A.L. - Produit des matrices***

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et soit $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors :

$$mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$$

Autrement dit, une composée d'applications linéaires est représentée par le produit des matrices correspondantes (dans le même ordre!)

Proposition 10 ***Puissance des endomorphismes***

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors pour tous endomorphismes f et g de $\mathcal{L}(E)$, on a :

$$mat_{\mathcal{B}}(f \circ g) = mat_{\mathcal{B}}(f) \times mat_{\mathcal{B}}(g)$$

et en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ mat_{\mathcal{B}}(f^n) = (mat_{\mathcal{B}}(f))^n$$

17.2.3 Matrices des images de vecteurs

Théorème 11

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E et soit $\mathcal{B}'$ une base de F.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et soit $A = mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.
Soit $\overrightarrow{x}$ un vecteur de E, représenté par la matrice colonne X dans la base $\mathcal{B}$.
Soit $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x})$ son image par l'application f, que l'on représente par la matrice colonne Y dans la base $\mathcal{B}'$. Alors :

$$\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) \Longleftrightarrow\Longleftrightarrow Y = AX$$

Exemple :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Quelles sont les coordonnées de $f(\overrightarrow{u})$ dans la base $\mathcal{B}$?

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + 3z \\ -x + z \\ x - 3y + 2z \end{pmatrix}$$

Le vecteur $f(\overrightarrow{u})$ a donc pour coordonnées : $(2x - y + 3z, -x + z, x - 3y + 2z)$.

Définition 12 — **Noyau d'une matrice**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **noyau de la matrice A** l'ensemble :

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \ / \ AX = 0\}$$

Remarque :

Rappelons que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{x} \in E \ / \ f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0_F}\}$$

Le noyau de la matrice A est donc l'ensemble des matrices qui représentent les vecteurs du noyau de f, si f représente l'application linéaire canoniquement associée à A.

Définition 13 — **Image d'une matrice**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **image de la matrice A** l'ensemble :

$$\mathrm{Im}(A) = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \ / \ \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \text{ t.q. } Y = AX\}$$

autrement dit :

$$\mathrm{Im}(A) = \{AX \ / \ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$$

Remarques :

R 1 – Rappelons que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a :

$$\mathrm{Im}(f) = \{\overrightarrow{y} \in F \ / \ \exists \overrightarrow{x} \in E \ / \ \overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x})\} = \{f(\overrightarrow{x}), \ \overrightarrow{x} \in E\}$$

L'image de la matrice A est donc l'ensemble des matrices qui représentent les vecteurs de l'image de f, si f représente l'application linéaire canoniquement associée à A.

R 2 – Rappelons également que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et que $E = Vect(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_p})$, on a exactement :

$$\mathrm{Im}(f) = Vect\big(f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \dots, f(\overrightarrow{e_p})\big)$$

Or, $f(\overrightarrow{e_1})$, $f(\overrightarrow{e_2})$, …, $f(\overrightarrow{e_p})$ sont exactement représentés par les colonnes de la matrice A qui représente f. Ainsi :

$$\mathrm{Im}(A) = Vect\big(\text{ colonnes de } A\big)$$

17.2.4 Rang d'une matrice

Définition 14 **Rang d'une matrice**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **rang de** A la dimension de $\mathrm{Im}(A)$, autrement dit, la dimension du Vect des colonnes de A.

Remarque :

Il existe trois formes de rangs :

- Le rang d'une application linéaire $\mathrm{rg}(f) = dim(\mathrm{Im}(f))$
- Le rang d'une matrice $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$
- Le rang d'une famille de vecteurs $\mathrm{rg}(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n}) = \dim(Vect(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n}))$

En fait, ces trois notions sont reliées les unes aux autres.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, notons $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E et soit $\mathcal{B}'$ une base de F, et enfin notons A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) &= \dim(Vect\,(f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \dots, f(\overrightarrow{e_p})))\\ &= \dim(Vect\,(\text{Colonnes de } A))\\ &= \dim(\mathrm{Im}(A)) = \mathrm{rg}(A)\end{aligned}$$

Le rang d'une application linéaire est donc égal au rang de n'importe quelle matrice la représentant.

Théorème 15 ***Théorème du rang***

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors : $\dim(Ker(A)) + \dim(Im(A)) = p$, autrement dit :

$$\dim(Ker(A)) + rg(A) = p$$

Remarque :

C'est le théorème analogue à celui pour les applications linéaires :
Si f est une application linéaire de E dans F, alors : $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.

Exemples :

E 1 – Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

<u>Déterminer $\mathrm{rg}(f)$, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$</u>

- Déterminons le noyau de f.

  Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}AX = 0 &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\\ &\Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} 3x - y + z &= 0 \\ x + 2y - 2z &= 0 \\ 2x + 3y - 3z &= 0 \end{aligned}\right.\end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} -7y+7z &= 0 \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ x+2y-2z &= 0 \\ 2x+3y-3z &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y &= z \\ x &= 0 \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} \in Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Ainsi,

$$\mathrm{Ker}(f) = Vect\big((0,1,1)\big)$$

- D'après le théorème du rang, on sait que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = 3$, donc puisque $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$, on a finalement $\mathrm{rg}(f) = 2$.
- Puisque $\mathrm{Im}(f)$ est représenté par les colonnes de la matrice A, on a donc :

$$\mathrm{Im}(f) = Vect\big((3,1,2),(-1,2,3),(1,-2,-3)\big)$$

Les deux derniers vecteurs étant colinéaires, on a même :

$$\mathrm{Im}(f) = Vect\big((3,1,2),(-1,2,3)\big)$$

Or, on sait que $\mathrm{rg}(f) = 2$, donc on a même ainsi déterminé une base de $\mathrm{Im}(f)$.

E 2 – Soit φ l'application qui va de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \varphi(P) = X^2P'' - 2XP$$

Montrer que φ est linéaire, donner sa matrice canoniquement associée, et déterminer son rang, son image, son noyau.

Vérifions déjà la linéarité.
Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + Q) &= X^2(\lambda P + Q)'' - 2X(\lambda P + Q) \\ &= X^2(\lambda P'' + Q'') - 2\lambda XP - 2XQ \\ &= \lambda(X^2P'' - 2XP) + (X^2Q'' - 2XQ) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q) \end{aligned}$$

Ainsi, φ est bien une application linéaire.

Écrivons la matrice qui représente φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$.
- $\varphi(1) = X^2 \times 0 - 2X \times 1 = -2X$
- $\varphi(X) = X^2 \times 0 - 2X \times X = -2X^2$
- $\varphi(X^2) = X^2 \times 2 - 2X \times X^2 = 2X^2 - 2X^3$

La matrice A qui représente φ est donc :

$$A = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} \varphi(1) & \varphi(2) & \varphi(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array} \end{array}$$

On a donc $\mathrm{Im}(\varphi) = Vect(-2X, -2X^2, 2X^2 - 2X^3) = Vect(X, X^2, X^2 - X^3)$. La famille étant libre (ce sont des polynômes non nuls de degrés étagés), c'est même une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$. On a donc $\mathrm{rg}(\varphi) = 3$.
Le théorème du rang nous donne que $\mathrm{rg}(\varphi) + \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, ce qui implique que $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 0$, i.e. $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$. L'application φ est donc injective.

Théorème 16 ***Bijectivité / Inversibilité***

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et soit $\mathcal{B}$ une base de E.
Soit f un endomorphisme de E et notons A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Alors :

$$f \text{ bijective} \iff A \text{ inversible}$$

Dans ce cas-là, la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$ est exactement la matrice A^{-1}.

17.2.5 Calcul du rang en pratique

Définition 17 **Matrice échelonnée**

On dit qu'une matrice A est **échelonnée** si elle écrite sous forme d'escalier où tous les paliers sont de largeur au maximum 1 (à part si la colonne est nulle) :

$$\begin{pmatrix}
\cdots & & & & & & & \\
\star & \vdots & 0 & & 0 & & 0 & 0 \\
\star & \vdots & 0 & & 0 & & 0 & 0 \\
 & & \cdots & & & & & \\
\star & & \star & \vdots & 0 & & 0 & 0 \\
 & & & & \cdots & & & \\
\star & & \star & & \star & \vdots & 0 & 0 \\
 & & & & & & \cdots\ \ \cdots & \cdots
\end{pmatrix}$$

Proposition 18

Le rang d'une matrice échelonnée est égal au nombre de colonnes non nulles qui la composent.

Remarques :

R 1 – Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes ne modifient pas le rang.
Lorsqu'on cherche le rang d'une matrice, on peut donc essayer de la triangulariser, voire l'échelonner pour pouvoir voir son rang facilement.
Rappelons que les opérations élémentaires autorisées sont :
- les échanges de lignes,
- remplacer une ligne L_i par $\alpha L_i + \beta L_j$ avec $\alpha \neq 0$,
- les échanges de colonnes,
- remplacer une colonne C_i par $\alpha C_i + \beta C_j$ avec $\alpha \neq 0$.

R 2 – En particulier, pour voir si une matrice est inversible, il suffit de l'échelonner à l'aide d'opérations élémentaires et de regarder si son rang est égal à la taille de la matrice.
Si c'est le cas, la matrice est inversible. Sinon, la matrice n'est pas inversible.