CHAPITRE 16

Développements Limités

16.1 Fonction négligeable devant une autre

16.1.1 Définitions

Définition 1

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0.
On dit que **f est négligeable devant g au voisinage de x_0** s'il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 telle que, au voisinage de x_0 :

$$f(x) = g(x)\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$$

On note alors :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to x_0}{=} o\big(g(x)\big)}$$

Remarques :

R 1 – Losque $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o\big(g(x)\big)$, **$g(x)$ est prépondérant devant $f(x)$ au voisinage de x_0.**

R 2 – Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 (sauf éventuellement en x_0), alors :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to x_0}{=} o\big(g(x)\big) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

R 3 – On a finalement trois possibilités pour comparer deux fonctions f et g au voisinage d'un point x_0 :
- l'inégalité : $f(x) \leqslant g(x)$
- l'équivalence : $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$
- la négligeabilité : $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o\big(g(x)\big)$

Exemples :

E 1 – **Fonctions puissances** :

$$\text{si } \alpha < \beta, \qquad x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$$

$$\text{si } \alpha < \beta, \qquad x^\beta \underset{x\to0}{=} o\left(x^\alpha\right)$$

E 2 – **Puissances et Logarithmes** :

$$\forall\alpha,\beta>0, \quad (\ln(x))^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$$

$$\forall\alpha,\beta>0, \quad (\ln(x))^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

E 3 – **Puissances et Exponentielles** :

$$\forall\alpha,\beta>0, \quad x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{\beta x}\right)$$

$$\forall\alpha,\beta>0, \quad e^{\beta x} \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

E 4 – **Logarithmes et Exponentielles** :

$$\forall\alpha,\beta>0, \quad (\ln(x))^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{\beta x}\right)$$

16.1.2 Propriétés

- l'addition

$$\text{si } f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big) \quad \text{et } f_2(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big), \qquad \text{alors } f_1(x)+f_2(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big)$$

- la multiplication par un scalaire $\alpha \neq 0$

$$\text{si } f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(kg(x)\big), \qquad \text{alors } f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big)$$

$$\text{si } kf(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big), \qquad \text{alors } f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big)$$

- la multiplication par une fonction.
  Soit u une fonction qui ne s'annule pas au voisinage de x_0. Alors :

$$\text{si } \ f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big), \qquad \text{alors } u(x)f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(u(x)g(x)\big)$$

$$\text{si } \ f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big), \qquad \text{alors } \frac{f(x)}{u(x)} \underset{x\to x_0}{=} o\left(\frac{g(x)}{u(x)}\right)$$

- le produit.

$$\text{si } f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_1(x)\big) \quad \text{et } f_2(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_2(x)\big), \qquad \text{alors } f_1(x)f_2(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_1(x)g_2(x)\big)$$

- la valeur absolue.

$$\text{si } f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big), \qquad \text{alors } |f(x)| \underset{x\to x_0}{=} o\big(|g(x)|\big)$$

- l'inverse.
Soit f une fonction qui ne s'annule pas au voisinage de x_0. Alors :

$$\text{si} \quad f(x) \underset{x \to x_0}{=} o\big(g(x)\big), \qquad \text{alors } \frac{1}{g(x)} \underset{x \to x_0}{=} o\left(\frac{1}{f(x)}\right)$$

- changement de variable.
Soit $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit u une fonction définie au voisinage de t_0 avec $\lim_{t \to t_0} u(t) = x_0$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{si} \quad f(x) \underset{x \to x_0}{=} o\big(g(x)\big), \qquad \text{alors } f(u(t)) \underset{t \to t_0}{=} o\Big(g(u(t))\Big)$$

- transitivité

$$\text{si } f(x) \underset{x \to x_0}{=} o\big(g(x)\big) \quad \text{et } g(x) \underset{x \to x_0}{=} o\big(h(x)\big), \qquad \text{alors } f(x) \underset{x \to x_0}{=} o\big(h(x)\big)$$

Proposition 2 ***Lien entre équivalence et négligeabilité***

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

1.
$$f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \iff f(x) - g(x) \underset{x \to x_0}{=} o\big(g(x)\big) \iff g(x) - f(x) \underset{x \to x_0}{=} o\big(f(x)\big)$$

2.
$$\textit{si} \quad g(x) \underset{x \to x_0}{=} o\big(f(x)\big), \qquad \textit{alors } f(x) + g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} f(x)$$

3.
$$\textit{si} \quad f(x) \underset{x \to x_0}{=} o\big(u(x)\big) \quad \textit{et } u(x) \underset{x \to x_0}{\sim} v(x), \qquad \textit{alors } f(x) \underset{x \to x_0}{=} o\big(v(x)\big)$$

16.2 Développements limités

16.2.1 Développement limité en 0

Définition 3

Soit f une fonction définie au voisinage de 0.
On dit que f **admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0** s'il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que au voisinage de 0 :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + o\big(x^n\big)}$$

autrement dit, $f(x)$ s'écrit localement comme la somme de :

- une fonction polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, appelé la **partie régulière du DL**
- une fonction négligable devant x^n : $o(x^n)$, appelé le **reste du DL**

Exemple :

Soit f la fonction définie par $\forall x > 1, f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Cherchons le développement limité de cette fonction au voisinage de 0.

On sait que pour tout x au voisinage de 0,on a : $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$.

On peut donc écrire que, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \\ &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \varepsilon(x) = \frac{x}{1-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

On a donc trouvé un développement limité de $\dfrac{1}{1-x}$ au voisinage de 0.

Définition 4

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f est définie au voisinage de x_0, on dit que **f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0** s'il existe $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ tels que au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

Théorème 5

Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, alors la partie régulière de ce développement limité est unique.

16.2.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 6 — ***Formule de Taylor-Young***

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et si $x_0 \in I$, alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)} \iff \boxed{f(x_0+h) = \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n)}$$

Remarque :

Le plus souvent, on utilise ce théorème dans le cas particulier où $x_0 = 0$, ce qui donne :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + o(x^n)}$$

Proposition 7

Si f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + o((x-x_0)^n)$$

Alors, on a nécessairement $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a_0$.
De plus, au voisinage de x_0, f est équivalente au premier terme non nul de son développement limité : c'est-à-dire que si p est tel que pour tout $0 \leqslant k \leqslant p-1$, $a_k = 0$ et $a_p \neq 0$, alors, on a au voisinage de x_0 :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} a_p(x-x_0)^p$$

16.2.3 DL usuels

Théorème 8 ***DL usuels AU VOISINAGE DE 0***

Les DL usuels suivants existent d'après le Théorème de Taylor-Young. Il faut les apprendre par coeur.

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)}$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + o(x^n)}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)}$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n)}$$

$$\boxed{\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)}$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)}$$

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n + o(x^n)}$$

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})}$$

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})}$$

Remarque :

Les DL indispensables sont ceux de e^x, $\dfrac{1}{1-x}$ et $\ln(1+x)$, dont on se sert très régulièrement en exercice. Il faut savoir retrouver rapidement les autres par des moyens mémotechniques.

- Pour le DL de $\dfrac{1}{1+x}$, on écrit déjà celui de $\dfrac{1}{1-x}$ et on remplace les x par $(-x)$
- Pour le DL de $\ln(1+x)$, si on connaît déjà celui de $\dfrac{1}{1+x}$, il suffit de prendre la primitive qui s'annule en 0
- Pour $\sqrt{1+x}$, on écrit la formule pour $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$
- Pour $\cos(x)$: on écrit le DL de e^x, on ne garde que les puissances paires (car cos est paire) et on rajoute les signes $+-+-+-+-\dots$
- Pour $\sin(x)$: on écrit le DL de e^x, on ne garde que les puissances impaires (car sin est impaire) et on rajoute les signes $+-+-+-+-\dots$

16.2.4 Opérations sur les DL

Proposition 9

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ admettant chacune un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$$

1. *Alors $f+g$ admet le développement limité d'ordre n au voisinage de 0 suivant :*

$$(f+g)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k + o(x^n)$$

2. *Alors fg admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 que l'on obtient en faisant le produit des polynômes $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $\sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n.*

Exemple :

Calculer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $\dfrac{e^x}{1+x}$.

$$\begin{aligned}
\frac{e^x}{1+x} &= e^x \times \frac{1}{1+x} \\
&= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right) \\
&= 1 - x + x^2 + x - x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)
\end{aligned}$$

Proposition 10

Soit $f : I \to J$ une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 et <u>telle que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$</u> :

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k x^k}_{P(x)} + o(x^n)$$

Soit $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$g(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} b_k x^k}_{Q(x)} + o(x^n)$$

Alors $g \circ f$ admet un développement limité d'ordre n que l'on obtient effectuant $Q \circ P$ et en ne gardant que les termes de dégré inférieur ou égal à n.

Exemple :

Déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $e^{\sqrt{x+1}}$.

$$\begin{aligned}
e^{\sqrt{x+1}} &= \exp\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)\\
&= e\times\exp\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)\\
&= e\times\left(1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)^2+o(x^2)\right)\\
&= e\left(1+\frac{1}{2}x+o(x^2)\right)\\
&= e+\frac{e}{2}x+o(x^2)
\end{aligned}$$

Proposition 11

Lorsqu'on veut faire le développement limité d'un quotient, on se sert d'une composée avec le développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$ *ou* $\dfrac{1}{1-x}$.

Exemples :

E 1 – Déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{1+\ln(1+x)}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\ln(1+x)} &= \frac{1}{1+x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\\
&= 1-\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)+\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2+o(x^2)\\
&= 1-x+\frac{1}{2}x^2+x^2+o(x^2)\\
&= 1-x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

E 2 – Déterminer le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\sqrt{1+x}} &= \frac{1}{1+1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)}\\
&= \frac{1}{2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)}\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}+o(x^3)}\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}\right)+\left(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}\right)^2-\left(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}\right)^3\right)+o(x^3)\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}-\frac{5}{64}x^3\right)+o(x^3)\\
&= \frac{1}{2}-\frac{x}{8}+\frac{x^2}{16}-\frac{5}{128}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

16.2.5 Comportement local et DL

Proposition 12

Si f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0,

$$f(x) = a + b(x - x_0) + o((x - x_0))$$

alors f est dérivable en x_0 et $a = f(x_0)$ et $b = f'(x_0)$.
Dans ce cas, l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est donc le terme $y = a + b(x - x_0)$ et pour connaître la position de la courbe par rapport à la tangente, il suffit de regarder le signe du terme suivant du développement limité.

Exemple :

Calculons le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+e^x} &= \frac{1}{1+1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \\
&= \frac{1}{2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right) + \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)^3\right) + o(x^3) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{x}{4}}_{\text{eq. de la tangente}} + \underbrace{\frac{x^3}{48}}_{\text{donne position de la tangente}} + o(x^3)
\end{aligned}$$

Donc la courbe représentative de f admet en 0 une tangente d'équation $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4}$.

De plus, on a $f(x) - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{x^3}{48} + o(x^3)$, donc au voisinage de 0, la position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe de $\dfrac{x^3}{48}$.
Pour $x < 0$, la courbe est en-dessous de la tangente, et pour $x > 0$, la courbe est au-dessus de la tangente.