CHAPITRE 13

Dérivation sur un intervalle

13.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle

13.1.1 Classe d'une fonction

Définition 1

Soient E et F deux ensembles. On note l'ensemble de toutes les applications de E dans F :

$$F^E = \{f : E \to F\}$$

Exemples :

- **E 1** – $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- **E 2** – $\mathbb{R}^{[0,+\infty[}$ désigne l'ensemble des fonctions de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$
- **E 3** – $(\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{R}}$ désigne l'ensemble des fonctions strictement positives
- **E 4** – $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites réelles.

Définition 2

On appelle **dérivée n-ième de f** l'action de dérivée n fois la fonction f :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \qquad \forall n \geqslant 1,\ f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' = (f')^{(n-1)}$$

Une fonction f est n-fois dérivable sur I si elle est $(n-1)$-fois dérivable sur I et si la fonction $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I.

Définition 3

On note :
- $\mathcal{C}^0(I)$ est l'ensemble des fonctions **continues sur I**.
- $\mathcal{C}^1(I)$ est l'ensemble des fonctions **continûment dérivables sur I**, i.e. l'ensemble des fonctions qui sont dérivables sur I dont la fonction dérivée f' est continue sur I.
- $\mathcal{C}^n(I)$ est l'ensemble des fonctions n **fois continûment dérivables sur I**, i.e. l'ensemble des fonctions n-fois dérivables sur I dont la fonction dérivée n-ième $f^{(n)}$ est continue sur I ;
- $\mathcal{C}^\infty(I)$ est l'ensemble des **fonctions indéfiniment dérivables sur I**

Remarque :

On a les inclusions suivantes : $\mathcal{C}^\infty(I) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^{n+1}(I) \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I) \subset \mathbb{R}^I$

13.1.2 Dérivées n-ièmes usuelles

Fonctions Polynômes

Proposition 4

Notons pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$f_0 : x \longmapsto x^n, \qquad \text{et} \qquad f_a : x \longmapsto (x-a)^n$$

Les fonctions f_0 et f_a sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, f_0^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, f_a^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(x-a)^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Remarque :

Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Si P est un polynôme tel que $\deg(P) = n$, alors

$$\deg\left(P^{(k)}\right) = \begin{cases} n-k & \text{si } k \leqslant n \\ -\infty & \text{si } k > n \end{cases}$$

Fonctions inverse

Proposition 5

Notons pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$f_0 : x \longmapsto \frac{1}{x}, \qquad \text{et} \qquad f_a : x \longmapsto \frac{1}{x-a}$$

Les fonctions f_0 et f_a sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ là où elles sont définies et :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_0^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\},\ f_a^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$$

Démonstration :

Montrons-le par récurrence :

$n = 0$: f_a est 0-fois dérivable sur I et $\forall x \in I, f_a(x) = \dfrac{(-1)^0 0!}{(x-a)^{0+1}}$.

Soit $n \geqslant 0$. On suppose la propriété vraie au rang n.

Posons $f^{(n)} : x \mapsto \dfrac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$ qui est dérivable sur I puisque $x \mapsto (x-a)^{n+1}$ l'est et n'est jamais nulle, donc f est bien $(n+1)$-fois dérivable sur I et

$$\forall x \in I, f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! \times \frac{-(n+1)}{(x-a)^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-a)^{n+2}}$$

Remarque :

La fonction $g_a : x \longmapsto \dfrac{1}{a-x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, +\infty[$ et sur $]-\infty, a[$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ g_a^{(n)}(x) = \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$$

Fonctions exponentielles et logarithmes

Proposition 6

La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exp^{(n)}(x) = \exp(x)$$

La fonction $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ \ln^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

Fonctions trigonométriques

Proposition 7

Les fonctions sinus, cosinus, tangente, sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle où elles sont définies. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad \textit{et} \qquad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

13.1.3 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Proposition 8 ***Stabilité par combinaison linéaire***

L'ensemble $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$.
Autremeent dit, si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + g)$ est encore une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et de plus :

$$(\alpha f + g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + g^{(n)}$$

Proposition 9 ***Formule de Leibniz***

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I, alors le produit (fg) est encore de classe $\mathcal{C}^n$ et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Proposition 10

Soient I et J deux intervalles et soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$.
Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, et si g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

Remarques :

R 1 – Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $f_\alpha = x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

R 2 – Pour $a > 0$, la fonction $f_a : x \mapsto a^x = e^{x \ln(a)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_a^{(n)}(x) = (\ln(a))^n a^x$$

R 3 – Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et si g ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I.

13.1.4 Théorème Limite de la Dérivée

Théorème 11

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ mais de classe $\mathcal{C}^n$ a priori uniquement sur $[a,b[$.
Si la fonction $f^{(n)}$ admet une limite finie ℓ en b, alors f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et $f^{(n)}(b) = \ell$.

Proposition 12

Soit I un intervalle et soit $a \in I$.
Soit f une fonction continue sur I (donc en a) et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$.
Si f' admet une limite finie en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$$

Remarque :

Attention, la continuité en a est importante

13.2 Théorèmes de dérivabilité

13.2.1 Condition nécessaire d'extremum local

Définition 13

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.
On dit que f admet un **maximum local en x_0** s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I,\ f(x) \leqslant f(x_0)$$

On dit que f admet un **minimum local en x_0** s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I,\ f(x) \geqslant f(x_0)$$

Un **extremum local** est un minimum ou maximum local.

Théorème 14 *Condition nécessaire d'extremum local*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit x_0 un point intérieur de I (i.e. qui n'est pas sur les bords de l'intervalle).

$$\text{Si } f \text{ possède un extremum local en } x_0,\ \text{alors } f'(x_0) = 0$$

autrement dit, il est nécessaire que $f'(x_0) = 0$ pour que f possède un extremum local en x_0.

Remarque :

Si l'extremum est situé sur l'extrémité x_0 de l'intervalle I, rien n'impose alors que $f'(x_0) = 0$

13.2.2 Théorème de Rolle

Théorème 15 *Théorème de Rolle*

Soient a et b deux réels avec $a < b$.
Soit f une fonction de $[a, b] \to \mathbb{R}$ vérifiant :
- *f continue sur $[a, b]$*
- *f dérivable sur $]a, b[$*
- *$f(a) = f(b)$*

Alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration :

On sait que f est continue sur $[a, b]$, donc f bornée et atteint ses bornes.

Notons $M = \sup\limits_{[a,b]} f = f(c)$ et $m = \inf\limits_{[a,b]} f = f(d)$.

1er cas : $m = M$, alors $\forall x \in [a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M = m$, donc $f(x) = m$. Ainsi f est constante sur $[a, b]$, d'où $\forall c \in]a, b[, f'(c) = 0$.

2ème cas : $m < M$. On a alors $m < f(a)$ ou $f(a) < M$ (car sinon $m \geqslant f(a)$ et $f(a) \geqslant M$, on aurait $M \leqslant f(a) \leqslant m < M$: absurde).

Supposons par exemple que $m < f(a) = f(b)$, i.e. $f(d) < f(a) = f(b)$.

Donc d est un point intérieur de $[a, b]$, f est dérivable en d, f admet un extremum en d, donc on a $f'(d) = 0$.

13.2.3 Théorème des Accroissements Finis

Théorème 16 ***Théorème des Acroissements Finis***

Soient a et b deux réels avec $a < b$.
Soit f une fonction de $[a, b] \to \mathbb{R}$ vérifiant :
- *f continue sur $[a, b]$*
- *f dérivable sur $]a, b[$*

Alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou autrement dit, il existe un $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Démonstration :

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - f(a) - K(x-a) \end{array}$ où K est une constante réelle choisie pour que $\varphi(b) = 0$.

K existe et est unique, puisque $K = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

On a :
- φ est continue sur $[a, b]$ car f l'est
- φ est dérivable sur $]a, b[$ car f l'est
- $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

Donc (Théorème de Rolle), il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, i.e. $f'(c) - K = 0$.

D'où $K = f'(c)$, i.e. $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Conséquences 17 ***Inégalité des Accroissements Finis***

Soient a et b deux réels avec $a < b$.
Soit f une fonction de $[a, b] \to \mathbb{R}$ vérifiant :
- *f continue sur $[a, b]$*
- *f dérivable sur $]a, b[$*
- *il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in]a, b[, \ m \leqslant f'(x) \leqslant M$*

Alors :

$$m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$$

Conséquences 18 ***Inégalité des Accroissements Finis***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et s'il existe $K > 0$ tel que

$$\forall t \in I, \ |f'(t)| \leqslant K$$

alors pour tous $x, y \in I$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|$$

13.2.4 Variations des fonctions

Théorème 19 ***Sens de variation d'une fonction***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- *f est constante sur $I \iff f' = 0$ sur I*
- *f est croissante sur $I \iff f' \geqslant 0$ sur I*
- *f est déconstante sur $I \iff f' \leqslant 0$ sur I*

Démonstration :

Montrons l'équivalence pour f est croissante sur $I \iff f' \geqslant 0$ sur I

$\Rightarrow$ Supposons que f est croissante sur I. Alors :

$$\forall x_0 \in I, \forall x \in I \setminus \{x_0\}, \ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$$

Lorsque $x \to x_0$, f étant dérivable en x_0 on obtient en passant à la limite dans l'inégalité :

$$f'(x_0) \geq 0$$

$\Leftarrow$ Soient $a \leqslant b$, deux réels de I. La fonction f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, donc

$$\exists c \in]a, b[\ / \ f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \geq 0 \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$$

donc f est croissante sur I.

Remarque :

Soit f une fonction dérivable sur I.

- Si $f' > 0$ sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors la fonction f est strictement croissante.
- Si $f' < 0$ sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors la fonction f est strictement décroissante.

13.3 Convexité d'une fonction

Définition 20

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I.

On dit que f est **convexe sur** I si une des propositions suivantes (équivalentes) est vérifiée :

- la courbe de f est au-dessus de toutes ses tangentes
- la fonction f' est croissante sur I
- la fonction f'' est positive sur I

Définition 21

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I.

On dit que f est **concave sur** I si $-f$ est une fonction convexe sur I, autrement dit si une des propositions suivantes (équivalentes) est vérifiée :

- la courbe de f est en-dessous de toutes ses tangentes
- la fonction f' est décroissante sur I
- la fonction f'' est négative sur I

Remarque :

> Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, et si f'' s'annule en un point x_0 en changeant de signe, alors la fonction f change de convexité au point x_0. Le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ est alors appelé un **point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$**.
> Un point d'inflexion est donc un point où la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente.

Théorème 22 ***Inégalités de convexité***

La fonction exponentielle est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ et sa courbe est en particulier située au-dessus de sa tangente en 0 :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x}$$

La fonction logarithme népérien est une fonction concave sur $]0, +\infty[$ et sa courbe est en particulier située en-dessous de sa tangente en 1 :

$$\boxed{\forall x > 0,\ \ln(x) \leqslant x - 1}$$

ou autrement dit

$$\boxed{\forall x > -1,\ \ln(1 + x) \leqslant x}$$