CHAPITRE 6

Limites et équivalents

6.1 Limites d'une fonction

On considère dans cette partie, une fonction f définie sur son domaine de définition D_f.

6.1.1 Voisinage d'un point

Définition 1

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est définie **au voisinage de x_0** s'il existe un intervalle I, non réduit à un point, contenant x_0 tel que f soit définie sur I sauf éventuellement en x_0.
Autrement dit, $I \subset D_f$, ou éventuellement $I \setminus \{x_0\} \subset D_f$.

Exemple :

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$.
Cette fonction est bien définie au voisinage de 2 car $]1, 3]$ est un intervalle contenant 2 et inclus dans D_f.
Cette fonction est définie au voisinage de 1 car $]0, 2[$ est un intervalle contenant 1 et qui est, si on le prive de 1, inclus dans D_f.

Définition 2

On dit que f est définie **au voisinage de $+\infty$** s'il existe un réel a tel que $[a, +\infty[\subset D_f$.
On dit que f est définie **au voisinage de $-\infty$** s'il existe un réel b tel que $]-\infty, b] \subset D_f$.

Exemple :

Soit $g : x \longmapsto \ln(x-8)$.
Cette fonction est définie sur $]8, +\infty[$ qui contient au moins l'intervalle $[9, +\infty[$. Ainsi, la fonction g est définie au voisinage de $+\infty$.
La fonction g n'est cependant pas définie au voisinage de $-\infty$ car D_g ne contient aucun intervalle du type $]-\infty, b]$ avec $b \in \mathbb{R}$

6.1.2 Limite en un point $x_0 \in \mathbb{R}$

Définition 3

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On suppose que la fonction f est définie au voisinage de x_0.
On dit que **la fonction f admet pour limite finie ℓ en x_0** si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0\ /\ \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Autrement dit, $f(x)$ peut être aussi proche que l'on veut de ℓ, du moment que x est suffisamment proche de x_0. On note alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$$

Définition 4

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On suppose que la fonction f est définie au voisinage de x_0.

- On dit que **la fonction f admet pour limite $+\infty$ en x_0** si :

$$\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0\ /\ \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \geqslant A$$

  Autrement dit, $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut, du moment que x est suffisamment proche de x_0. On note alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty$$

- On dit que **la fonction f admet pour limite $-\infty$ en x_0** si :

$$\forall B < 0,\ \exists \alpha > 0\ /\ \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \leqslant B$$

  Autrement dit, $f(x)$ peut être aussi petit que l'on veut, du moment que x est suffisamment proche de x_0. On note alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \qquad \text{ou} \qquad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} -\infty$$

Remarque :

> La phrase avec les quantificateurs s'exprime toujours de la même manière :
>
> "Pour tout voisinage V de la limite", "Il existe un voisinage U du point" "tel que" $x \in U \Longrightarrow f(x) \in V$

Définition 5

Soit f une fonction définie en un point x_0 et définie au voisinage de x_0.
On dit que f est **continue en x_0** si :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

autrement dit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0\ \ \forall x \in D_f, |x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

6.1.3 Limites à gauche et à droite en un point

Définition 6

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

- On suppose que la fonction f est définie au voisinage à gauche de x_0.
  On dit que **la fonction f admet pour limite finie ℓ à gauche en x_0** si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \ / \ \forall x \in D_f, \quad x \in [x_0 - \alpha, x_0[\leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

  On note alors :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x) \underset{x \to x_0^-}{\longrightarrow} \ell$$

- On suppose que la fonction f est définie au voisinage à droite de x_0.
  On dit que **la fonction f admet pour limite finie ℓ à droite en x_0** si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \ / \ \forall x \in D_f, \quad x \in]x_0, x_0 + \alpha] \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

  On note alors :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} \ell$$

Proposition 7

Soit f une fonction définie en un point x_0. Alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \\ f(x_0) = \ell \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \end{cases}$$

Si ces conditions sont vérifiées, on peut dire que la fonction f est continue en x_0.

Exemple :

La fonction partie entière n'est pas continue en tout entier $k \in \mathbb{Z}$ car

$$\lim_{x \to k^-} \mathrm{Ent}(x) = k - 1, \qquad \lim_{x \to k^+} \mathrm{Ent}(x) = k$$

Proposition 8

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0, mais non définie en x_0. Alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \end{cases}$$

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que la fonction f est ***prolongeable par continuité en x_0****.*

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ \ln(x) & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

La fonction f est continue sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ (ce sont des fonctions usuelles, polynôme ou fonction logarithme). De plus,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (1 - x) = 0 \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \ln(x) = 0$$

donc la fonction f est prolongeable par continuité en 1 par une fonction g continue sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \\ \ln(x) & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

6.1.4 Limite au voisinage de l'infini

Définition 9

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que **la fonction f admet pour limite finie ℓ en $+\infty$** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists A \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in D_f, \quad x \geqslant A \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Autrement dit, $f(x)$ peut être aussi proche que l'on veut de ℓ, du moment que x est suffisamment grand. On note alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Définition 10

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.

- On dit que **la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$** si :

  $$\forall M > 0, \ \exists A \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in D_f, \quad x \geqslant A \Longrightarrow f(x) \geqslant M$$

  Autrement dit, $f(x)$ peut être aussi proche que l'on veut de ℓ, du moment que x est suffisamment grand. On note alors :

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

- On dit que **la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$** si :

  $$\forall m < 0, \ \exists A \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in D_f, \quad x \geqslant A \Longrightarrow f(x) \leqslant m$$

  Autrement dit, $f(x)$ peut être aussi proche que l'on veut de ℓ, du moment que x est suffisamment grand. On note alors :

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{ou} \qquad f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Remarque :

La phrase avec les quantificateurs s'exprime toujours de la même manière :

"Pour tout voisinage V de la limite", "Il existe un voisinage U du point" "tel que" $x \in U \Longrightarrow f(x) \in V$

6.2 Opérations sur les limites

6.2.1 Sommes, produits et quotients

Remarques :

R 1 – On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

R 2 – $\pm\infty$ signifie qu'il faut appliquer la "règle des signes" pour savoir si on a $-\infty$ ou $+\infty$.

R 3 – *F.I.* veut dire "forme indéterminée"

Dans toute cette partie, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell'$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$F.I.$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$	$-\infty$	$\ell+\ell'$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$	$F.I.$	$+\infty$	$+\infty$

Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell' \neq 0$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$	0	0	$F.I.$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \neq 0$	0	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$	$F.I.$	$\pm\infty$	$\pm\infty$

Limite de l'inverse

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$-\infty$	$\ell \neq 0$	0^-	0	0^+	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)}$	0	$\dfrac{1}{\ell}$	$-\infty$	pas de limite	$+\infty$	0

Limite du quotient

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0^+$ ou 0^-	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell' \neq 0$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$	$F.I.$	0	0
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \neq 0$	∞	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$F.I.$

Remarque :

Il y a donc quatre types de forme indéterminée :

$$\boxed{\infty - \infty}, \quad \boxed{0 \times \infty}, \quad \boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}, \quad \boxed{\dfrac{0}{0}}$$

6.2.2 Composition des limites

Théorème 11

Soient f et g deux fonctions telles que $f(D_f) \subset D_g$, et soient $a, b, c \in \overline{R}$.
Si
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$,
- $\lim\limits_{u \to b} g(u) = c$,

Alors, $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = c$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln(e^{-2x} + 1)$$

Quelles sont les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$?

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} + 1 = 1$ et $\lim\limits_{u \to 1} \ln(u) = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} \ln(u) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

6.2.3 Principales propriétés

Théorème 12 ***Unicité***

Si f admet une limite en un point, alors la limite est unique.

Proposition 13 ***Limites et bornes***

Soit $x_0 \in \overline{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction telle que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

Alors :

- *f est bornée au voisinage de x_0.*

- *Si $\ell < M$, alors il existe un voisinage de x_0 tel que $f(x) < M$*
- *Si $\ell > m$, alors il existe un voisinage de x_0 tel que $f(x) > M$*
- *Si $m < \ell < M$, alors il existe un voisinage de x_0 tel que $m < f(x) < M$*
- *Si $\ell \neq 0$, alors il existe un voisinage de x_0 tel que $f(x) \neq 0$ et $f(x)$ est du signe de ℓ.*

Théorème 14

Soit f une fonction telle que, pour tout x au voisinage de x_0, on ait :

$$f(x) \geqslant 0 \qquad (ou\ f(x) > 0)$$

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, *alors* $\ell \geqslant 0$.

Théorème 15 ***Passage à la limite dans les inégalités***

Si f et g ont toutes deux des limites finies en x_0 et si pour tout x au voisinage de x_0,

$$f(x) \leqslant g(x)$$

alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Remarque :

> Par passage à la limite dans une inégalité, l'inégalité devient systématiquement large

Proposition 16

Soit $x_0 \in \overline{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction telle que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

Alors :

- *Si pour tout x au voisinage de x_0, on a $m \leqslant f(x)$ (ou $m < f(x)$), alors $m \leqslant \ell$.*
- *Si pour tout x au voisinage de x_0, on a $f(x) \leqslant M$ (ou $f(x) < M$), alors $\ell \leqslant M$.*
- *Si pour tout x au voisinage de x_0, on a $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors $m \leqslant \ell \leqslant M$.*

6.2.4 Théorèmes d'encadrement

Théorème 17 ***Théorème "des gendarmes"***

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

- *Si pour tout x au voisinage de x_0, on a*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

  et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$,
  Alors, la fonction g admet également une limite finie en x_0 et

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$$

- *Si pour tout x au voisinage de x_0, on a*

$$|f(x) - \ell| \leqslant g(x)$$

  et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$,
  alors, la fonction f admet également une limite finie en x_0 et

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Conséquence 18

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 avec $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si

- *f est bornée au voisinage de x_0,*
- *$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$,*

Alors,

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$$

Théorème 19 ***Limites finies par comparaison***

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Supposons que pour tout x au voisinage de x_0, on a

$$f(x) \leqslant g(x)$$

- *Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors on a aussi $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.*
- *Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, alors on a aussi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.*

6.2.5 Le cas des fonctions monotones

Théorème 20

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a, b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si f est monotone sur $]a, b[$ (croissante ou décroissante), alors f possède toujours une limite en a et b, la limite pouvant être finie ou infinie.

Remarques :

R 1 – Si f est croissante et majorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie ℓ en b et, pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \leqslant \ell$. On a même :
$$\ell = \sup_{x \in]a,b[} f(x)$$

R 2 – Si f est croissante et minorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie ℓ en a et, pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \geqslant \ell$. On a même :
$$\ell = \inf_{x \in]a,b[} f(x)$$

R 3 – Si f est décroissante et minorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie ℓ en b et, pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \geqslant \ell$. On a même :
$$\ell = \inf_{x \in]a,b[} f(x)$$

R 4 – Si f est décroissante et majorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie ℓ en a et, pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \leqslant \ell$. On a même :
$$\ell = \sup_{x \in]a,b[} f(x)$$

R 5 – Si f est croissante et non majorée sur $]a, b[$, alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$

R 6 – Si f est croissante et non minorée sur $]a, b[$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

R 7 – Si f est décroissante et non minorée sur $]a, b[$, alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = -\infty$

R 8 – Si f est décroissante et non majorée sur $]a, b[$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

6.3 Fonctions équivalentes

6.3.1 Définition

Définition 21

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0.
On dit que **f est équivalente à g au voisinage de x_0** s'il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 telle que, pour tout x au voisinage de x_0 :

$$f(x) = g(x)\,(1+\varepsilon(x)) \quad \text{avec } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

On note alors :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)}$$

Théorème 22

Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 (sauf éventuellement en x_0), alors

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Démonstration :

$\Rightarrow$ Supposons que $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$. Alors, il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 telle que, pour tout x au voisinage de x_0, on ait

$$f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x)) \qquad \text{avec } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Puisque g ne s'annule pas au voisinage de x_0, on peut donc écrire :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \varepsilon(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1$$

$\Leftarrow$ Posons pour tout x tel que $g(x) \neq 0$, $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. La fonction h est définie au moins sur un voisinage de x_0, et on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$. Alors, pour tout x au voisinage de x_0,

$$f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} g(x) = g(x)h(x) = g(x)\,(1 + (h(x)-1))$$

Autrement dit, en posant $\varepsilon(x) = h(x) - 1$ pour tout x tel que $h(x)$ existe, on a bien montré que

$$f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x)) \qquad \text{avec } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = \lim_{x\to x_0} (h(x)-1) = 0$$

Remarque :

Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$, on a aussi $g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$. On pourra donc dire que **les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de x_0.**

Exemple :

Considérons les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - x\ln(x) \qquad g(x) = x^2$$

Alors

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - x\ln(x)}{x^2} = 1 - \frac{\ln(x)}{x}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissances comparées), on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, autrement dit, on a

$$x^2 - x\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$$

6.3.2 Opérations sur les fonctions équivalentes

Proposition 23

Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Si f est g sont deux fonctions équivalentes en x_0, alors leur limite en x_0 sont de même nature et sont identiques si elles existent.

Remarques :

R 1 – Deux fonctions qui n'ont pas les mêmes limites ne peuvent pas être équivalentes.

R 2 – Deux fonctions qui ont la même limite en x_0 ne sont pas forcément équivalentes en x_0.

Proposition 24

- *Deux fonctions équivalentes au voisinage de x_0 sont de même signe au voisinage de x_0.*
- *Si $f > 0$ voisinage de x_0 et si $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$, alors $g > 0$ au voisinage de x_0.*
- *Si $f(x) \neq 0$ au voisinage de x_0 et si $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$, alors $g(x) \neq 0$ au voisinage de x_0.*

Théorème 25 ***Cas d'une limite finie NON NULLE***

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ avec $\ell \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \ell$.

Démonstration :

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, alors $\frac{f(x)}{\ell} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1$ et donc $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \ell$.

Remarques :

R 1 – $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \ell$ signifie que f est équivalente à la fonction constante $x \mapsto \ell$ au voisinage de x_0.

R 2 – De manière générale, il n'y a pas d'équivalent à la fonction nulle : $\boxed{\text{on n'écrira JAMAIS } f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} 0}$.

Théorème 26 ***Polynômes***

Soit P une fonction polynôme de degré n :

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

une fonction polynôme avec $a_n \neq 0$. Alors en $+\infty$ et en $-\infty$, $P(x)$ est équivalent à son monôme du plus haut degré :

$$P(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} a_n x^n, \qquad P(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} a_n x^n$$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x - 2}{x^4 + 2x^2 + 1}$. Alors

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x - 2}{x^4 + 2x^2 + 1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x^3}{x^4} = \frac{1}{x}$$

Théorème 27 ***Fonctions dérivables***

Soit f une fonction dérivable en a. On rappelle que cela signifie que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a)$$

Alors, on a

$$\boxed{f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a)(x - a)}$$

Conséquences 28

On en déduit les équivalents usuels suivants :

$$\boxed{e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x} \qquad \boxed{\ln(1 + x) \underset{x \to 0}{\sim} x} \qquad \boxed{\ln(x) \underset{x \to 1}{\sim} x - 1}$$

$$\forall \alpha \neq 0, \quad \boxed{(1 + x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x}, \qquad \boxed{\sqrt{1 + x} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{2} x}$$

Remarques :

R 1 – Soit $x_0 \in \overline{R}$, alors la relation d'équivalence au voisinage de x_0 est :
- **réflexive** : $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} f(x)$
- **symétrique** : $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} f(x)$
- **transitive** : Si $\begin{cases} f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} h(x) \end{cases}$, alors $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} h(x)$

R 2 – L'équivalence entre les fonctions est
- **compatible avec le produit** :

$$\text{Si } \begin{cases} f_1(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g_1(x) \\ f_2(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g_2(x) \end{cases}, \quad \text{alors } f_1(x) f_2(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g_1(x) g_2(x)$$

- **compatible avec le quotient** :

$$\text{Si}\left\{\begin{array}{l} f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x) \\ f_2(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_2(x) \\ f_2(x) \text{ au voisinage de } x_0 \text{ (sauf évent. en } x_0), \end{array}\right. , \quad \text{alors } \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$$

- **compatible avec la puissance** :

$$Si\left\{\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ f(x) > 0 \text{ au voisinage de } x_0 \end{array}\right. , \quad \text{alors } \forall \alpha \in \mathbb{R},\ (f(x))^\alpha \underset{x\to x_0}{\sim} (g(x))^\alpha$$

Attention que la puissance α ne doit pas dépendre de x !

- **compatible avec le changement de variable** : Soit $t_0 \in \overline{R}$ et soit u une fonction définie au voisinage de t_0 avec $\lim\limits_{t\to t_0} u(t) = x_0$ avec $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$\text{Si}\left\{\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ f(u(t)) \text{ et } g(u(t)) \text{ existent au vois. de } t_0 \end{array}\right. , \quad \text{Alors} f(u(t)) \underset{t\to t_0}{\sim} g(u(t))$$

Proposition 29

L'équivalence N'EST PAS COMPATIBLE avec la somme. Autrement dit :

$$Si f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x) \ \ et\ \ f_2(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_2(x),$$

on n'a pas forcément $f_1(x) + f_2(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x) + g_2(x)$

Démonstration :

Il suffit de trouver un contre-exemple.

si $f(x) = x^2 + x$ et $g(x) = -x^2 + 1$. Alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ et $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^2$ mais $f(x) + g(x) = x + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$. Or, $x^2 - x^2 = 0 \underset{x\to+\infty}{\sim} 0$.

Proposition 30

L'équivalence N'EST PAS COMPATIBLE avec la composition. Autrement dit :

$$Si\ f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)\ \ et\ u\circ f, u\circ g\ \ existent\ au\ voisinage\ de\ x_0$$

on n'a pas forcément $u\circ f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} u\circ g(x)$

Remarque :

En particulier, ON NE PEUT PAS COMPOSER PAR L'EXPONENTIELLE. Par exemple $x + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ (polynômes), mais e^{x+1} n'est pas équivalent à e^x en $+\infty$, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x+1}}{e^x} = e \neq 1$.

Proposition 31 ***Composition par*** $\ln$

Soit $x_0 \in \overline{R}$ et soit u une fonction strictement positive au voisinage de x_0 avec $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = \ell \in [0, +\infty[$, mais vérifiant $\ell \neq 1$. Alors

$$Si\ u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x), \qquad alors \ln(u(x)) \underset{x\to x_0}{\sim} \ln(v(x))$$

Démonstration :

On suppose que $u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x)$. Puisque u est strictement positive au voisinage de x_0, on sait que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{v(x)}{u(x)} = 1$.
Il faut montrer que $\ln(u(x)) \underset{x\to x_0}{\sim} \ln(v(x))$, autrement dit $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\ln(v(x))}{\ln(u(x))} = 1$.

$$\frac{\ln(v(x))}{\ln(u(x))} = \frac{\ln\left(\frac{v(x)}{u(x)}u(x)\right)}{\ln(u(x))} = \frac{\ln\left(\frac{v(x)}{u(x)}\right)}{\ln(u(x))} + \frac{\ln(u(x))}{\ln(u(x))} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{v(x)}{u(x)}\right)}{\ln(u(x))}$$

Or, $\ln\left(\dfrac{v(x)}{u(x)}\right) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ln(1)$ par composition et $\ln(u(x)) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}, \ell \neq 0$, donc par quotient, $\frac{\ln\left(\frac{v(x)}{u(x)}\right)}{\ln(u(x))} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$ et on a bien montré que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\ln(v(x))}{\ln(u(x))} = 1$$

6.4 Branches infinies d'une fonction

Lorsqu'une fonction f tend vers $\pm\infty$ en un point, ou lorsqu'on regarde ses limites en $\pm\infty$, on dit qu'on étudie **les branches infinies de la fonction f**.

6.4.1 Asymptote verticale en un point x_0

Définition 32

Soit f une fonction définie au voisinage du réel x_0.
Si

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

on dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote verticale** d'équation $x = x_0$.

6.4.2 Asymptote horizontale en $\pm\infty$

Définition 33

Soit f définie au voisinage de $+\infty$.
Si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$$

on dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = b$ ($b \in \mathbb{R}$).

Remarques :

- **R 1** – Si pour tout x au voisinage de $+\infty$, $f(x) \geqslant b$, alors la courbe représentative de f est au -dessus de l'asymptote.
- **R 2** – Si pour tout x au voisinage de $+\infty$, $f(x) \leqslant b$, alors la courbe représentative de f est en-dessous de l'asymptote.
- **R 3** – On peut faire de même en $-\infty$.

6.4.3 Asymptotes obliques en $\pm\infty$

Dans cette partie, on considère une fonction f telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$$

On pourrait faire de même pour une étude lorsque $x \to -\infty$.

Définition 34

Si

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty}$$

alors $f(x)$ devient très grand par rapport à x, lorsque $x \to +\infty$.
On dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction asymptotique** (Oy).

Définition 35

Si

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0}$$

alors $f(x)$ devient très petit par rapport à x, lorsque $x \to +\infty$.
On dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction asymptotique** (Ox).

Définition 36

Si

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

il y a deux cas :

- Si

  $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}}$$

  alors on dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote oblique d'équation** $y = ax + b$.
- Si

  $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = \pm\infty}$$

  alors on dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction asymptotique** $y = ax$.