CHAPITRE 5

Applications et fonctions usuelles

5.1 Applications de E vers F

5.1.1 Définitions

Définition 1

Soient E et F deux ensembles.
On dit que f est une **application de E dans F** si et seulement si, à tout élément x de E est associé un et un unique élément de F noté $f(x)$, et appelé **image de x par f**.

L'application f se note : $\boxed{f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}}$.

- E est appelé l'**ensemble de départ** de l'application f,
- F est appelé l'**ensemble d'arrivée** de l'application f.
- On dit qu'un élément $y \in F$ admet (au moins) **un antécédent** s'il existe un $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

On note F^E l'ensemble des applications de E dans F.

Exemples :

E 1 – Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$. C'est une application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$.

E 2 – Les ensembles E et F ne sont pas forcément des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Par exemple, on peut créer une application : $g : \begin{array}{ccc} \{\text{élèves de 813}\} & \longrightarrow & \{\text{Villes de France}\} \\ Y & \longmapsto & \text{Ville de résidence de } Y \end{array}$

Remarques :

R 1 – Dans une application, TOUS les éléments de E admettent une image dans F. Au contraire, les éléments de F n'ont pas forcément tous un antécédent dans E par f : l'ensemble F peut être "gros".

R 2 – Deux applications f et g sont égales si et seulement si :
- elles ont le même ensemble de départ E et le même ensemble d'arrivée F,
- $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$

5.1.2 Images directes et images réciproques

Définition 2

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application de E dans F.

- Soit A une partie de E. On appelle **image directe de A par l'application f** l'ensemble noté $f(A)$ défini par :
$$\boxed{f(A) = \{f(x) \ / \ x \in A\} = \{y \in F \ / \ \exists x \in E, y = f(x)\}}$$
c'est donc l'ensemble de toutes les images des éléments de A.
- Soit B une partie de F. On appelle **image réciproque de B par l'application f** l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ défini par :
$$\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in E \ / \ f(x) \in B\}}$$
c'est donc l'ensemble de tous les antécédents possibles pour les éléments de B par l'application f.

Exemples :

E 1 – Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$. L'ensemble de départ de f est $\mathbb{R}^+$.
L'ensemble d'arrivée de f est $\mathbb{R}$.
Soit $A = [0,3]$. Quelle est l'image de la partie A par f ?

$$\forall x \in [0,3], \ 0 \leqslant x \leqslant 3 \Longleftrightarrow 1 \leqslant x+1 \leqslant 4 \Longleftrightarrow 1 \leqslant \sqrt{x+1} \leqslant 2$$

Ainsi, l'ensemble des images des éléments de $[0,3]$ est l'ensemble $[1,2]$. On a donc

$$f([0,3]) = [1,2]$$

Soit $B = [2,5]$ qui est bien une partie de $\mathbb{R}$. Quelle est l'image réciproque de la partie B par f ?

$$2 \leqslant \sqrt{x+1} \leqslant 5 \Longleftrightarrow 4 \leqslant x+1 \leqslant 25 \Longleftrightarrow 3 \leqslant x \leqslant 24$$

Donc l'ensemble des x qui ont pour image un élément de $[2,5]$ est exactement l'ensemble $[3,24]$. Donc

$$f^{-1}([2,5]) = [3,24]$$

Remarque :

Attention, on peut écrire $f(x)$: c'est l'image de l'élément x. Mais on n'écrit jamais $f^{-1}(x)$: cela ne représenterait pas l'image réciproque de l'élément x. Il faut écrire $f^{-1}(\{x\})$ pour avoir l'ensemble des antécédents possibles pour x.

5.1.3 Composition d'applications

Définition 3

Soient E, F, G trois ensembles.
Soit f une application de E dans F, et soit g une application de F dans G.
On appelle **application composée de f avec g** l'application notée $g \circ f$ définie par :

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array}$$

Remarques :

- **R 1** – Pour que $g \circ f$ soit bien définie, l'ensemble d'arrivée de la fonction f doit être inclus dans l'ensemble de départ de la fonction g.
- **R 2** – Si les applications existent, on n'a pas forcément $g \circ f = f \circ g$. On dit que la loi $\circ$ n'est pas commutative.

Exemple :

Soient les fonctions :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x-3 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$

Peut-on définir $f \circ g$?
L'ensemble d'arrivée de g est $\mathbb{R}$ donc on peut bien compenser par f ensuite.
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln(x)) = 2\ln(x) - 3$$

Peut-on définir $g \circ f$?
La fonction f va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc a priori, certaines images ne seront pas dans $\mathbb{R}^{+*}$. On ne peut pas écrire $g \circ f$ sur tout $\mathbb{R}$, peut-être pour certaines valeurs.

$$2x - 3 \in \mathbb{R}^{+*} \iff 2x - 3 > 0 \iff 2x > 3 \iff x > \frac{3}{2}$$

Pour tout $x > \frac{3}{2}$, on peut définir $g \circ f(x)$, et alors :

$$\forall x \in \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[, \quad g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x-3) = \ln(2x-3)$$

5.1.4 Applications inversibles

Définition 4

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une application **inversible** si elle admet une fonction inverse, autrement dit s'il existe une application $g : F \to E$ telle que :
(i) $\forall x \in E, \ g \circ f(x) = x$
(ii) $\forall y \in F, \ f \circ g(y) = y$
On dit alors que g est l'**application réciproque** de f. On note souvent $g = f^{-1}$.

Exemples :

- **E 1** – La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^{+*} \\ x & \mapsto & \exp(x) \end{array}$ admet pour fonction réciproque la fonction $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$. En effet

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ln(e^x) = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ e^{\ln(x)} = x$$

- **E 2** – La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+} & \to & \mathbb{R}^{+} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ admet pour fonction réciproque la fonction $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+} & \to & \mathbb{R}^{+} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$. En effet

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+}, \ \sqrt{x^2} = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{+}, (\sqrt{x})^2 = x$$

Remarque :

Lorsque deux fonctions réelles sont réciproques l'une de l'autre, alors leurs graphiques sont symétriques par rapport à l'axe $y = x$

5.2 Cas des fonctions réelles

On considère ici des fonctions f définies sur un ensemble D, $D \subset \mathbb{R}$, et dont l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$

5.2.1 Parité

Définition 5

Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$. On dit que :

- f est **paire** si :
  (i) $\forall x \in D,\ -x \in D$
  (ii) $\forall x \in D,\ f(-x) = f(x)$
  La courbe représentative de f est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est **impaire** si :
  (i) $\forall x \in D,\ -x \in D$
  (ii) $\forall x \in D,\ f(-x) = -f(x)$
  La courbe représentative de f est alors symétrique par rapport à l'origine du repère.

5.2.2 Périodicité

Définition 6

Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$ et soit T un réel. On dit que f est **T-périodique** si :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $x \in D \Longleftrightarrow x + T \in D$
- $\forall x \in D,\ f(x+T) = f(x)$

5.2.3 Fonctions monotones

Définition 7

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que :

- f est **croissante sur I** si :

$$\forall a, b \in I, \quad a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b)$$

- f est **strictement croissante sur I** si :

$$\forall a, b \in I, \quad a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$$

- f est **décroissante sur I** si :

$$\forall a, b \in I, \quad a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \geqslant f(b)$$

- f est **strictement décroissante sur I** si :

$$\forall a, b \in I, \quad a < b \Longrightarrow f(a) > f(b)$$

5.2.4 Fonctions majorées et minorées

Définition 8

Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que :

- f est **majorée sur D** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in D,\ f(x) \leqslant M$
- f est **minorée sur D** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in D,\ f(x) \geqslant m$.
- f est bornée sur D si f est majorée et minorée sur D.

Remarque :

En particulier, lorsqu'une fonction est minorée par 0, on dit qu'elle est positive.
Lorsqu'une fonction est majorée par 0, on dit qu'elle est négative.

Définition 9

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que M est un **maximum** de la fonction f sur I si
  (i) M est un majorant de la fonction f
  (ii) $\exists x \in I$ tel que $f(x) = M$
- On dit que M est un **minimum** de la fonction f sur I si
  (i) M est un minorant de la fonction f
  (ii) $\exists x \in I$ tel que $f(x) = m$

Définition 10

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est une fonction majorée sur I, alors l'ensemble des majorants de f admet un plus petit élément, appelé la **borne supérieure de f**. On le note :

$$\sup_{x \in I} f(x)$$

- Si f est une fonction minorée sur I, alors l'ensemble des minorants de f admet un plus grand élément, appelé la **borne inférieure de f**. on le note :

$$\inf_{x \in I} f(x)$$

Remarque :

Si la borne supérieure est atteinte par la fonction f, alors la borne supérieure devient un maximum. De même pour la borne inférieure.

Exemple :

Considérons la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}$$

définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ est toujours positive, elle est donc minorée par 0. De même, tout réel négatif est un minorant de f.
O est le minorant le plus grand, mais la fonction n'admet aucun de minimum ici car on a jamais $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$$

5.3 Fonctions usuelles

5.3.1 Fonction valeur absolue

Définition 11

La fonction valeur absolue est la fonction : $\boxed{\begin{array}{rccc} \text{abs} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{rl} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{array}\right. \end{array}}$.

L'image d'un réel x par la fonction partie entière est noté $|x|$ ou $\text{abs}(x)$.

Proposition 12

1. *La fonction valeur absolue est définie, paire et positive sur $\mathbb{R}$.*
2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| = 0 \iff x = 0$*
3. *Pour tout $a > 0$, alors $|x| = a \iff x = a \quad$ ou $\quad x = -a$*

Remarques :

R 1 – On a pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x|.|y|$ et si $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

R 2 – Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|^2 = |x^2| = x^2$. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x^n| = |x|^n$

R 3 – On a pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant y^2 \iff |x| \geqslant |y|$.
Si x et y sont <u>positifs</u>, alors $x \leqslant y \iff x^2 \leqslant y^2$.

R 4 – Si $a > 0$, alors $\boxed{|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a}$

R 5 – Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

R 6 – L'inégalité triangulaire reste encore vraie : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\boxed{|x + y| \leqslant |x| + |y|}$

Proposition 13

1. *La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Les limites de la fonction valeur absolue sont :* $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} |x| = +\infty}$ *et* $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} |x| = +\infty}$
3. *La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ abs'(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & si\ x > 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{array}\right.$.*
4. *La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. Elle n'est donc pas dérivable sur tout $\mathbb{R}$.*
5. *La fonction valeur absolue est décroissante sur $\mathbb{R}^-$, puis croissante sur $\mathbb{R}^+$.*

5.3.2 Fonction partie entière

Définition 14

La **partie entière d'un réel x** est le plus grand entier qui est inférieur ou égal à x. On la note $\text{Ent}(x)$. On a donc par définition, pour tout réel x :

$$\boxed{\text{Ent}(x) \leqslant x < \text{Ent}(x) + 1}$$

et

$$\boxed{x - 1 < \text{Ent}(x) \leqslant x}$$

Proposition 15

1. *La fonction partie entière est définie sur $\mathbb{R}$.*
2. *La fonction partie entière est continue et dérivable sur chaque intervalle $]k, k+1[$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On a :*

$$\forall x \in]k, k+1[, \quad \mathit{Ent}'(x) = 0$$

3. *La fonction partie entière est discontinue (donc aussi non dérivable) en tout nombre entier.*
4. *La fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$.*

Remarques :

R 1 – Attention, la partie entière ne correspond pas forcément au "chiffre se trouvant avant la virgule", cela ne marche que pour les nombres positifs. On a par exemple :

$$\text{Ent}(2.56) = 2, \qquad \text{Ent}(-4.86541) = -5$$

R 2 – La fonction partie entière admet pour limites en l'infini :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \text{Ent}(x) = -\infty} \qquad \boxed{\lim_{x \to +\infty} \text{Ent}(x) = +\infty}$$

R 3 – Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\boxed{\lim_{x \to k^-} \text{Ent}(x) = k - 1} \qquad \boxed{\lim_{x \to k^+} \text{Ent}(x) = k}$$

5.3.3 Fonction racine carrée

Définition 16

Soit $a \geqslant 0$. La racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$ est l'unique solution positive de l'équation $x^2 = a$. La fonction racine carrée est définie sur $[0, +\infty[$.

Remarques :

- **R 1** – Pour $a \geqslant 0$, on a $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.
- **R 2** – Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$
- **R 3** – Pour a et b positifs, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et si $b > 0$, alors $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
- **R 4** – Si $xy \geqslant 0$, alors $\sqrt{xy} = \sqrt{|x|}\sqrt{|y|}$

Proposition 17

1. *La fonction racines carrée est définie et continue sur* $\mathbb{R}^+$.
2. *On a :*
$$\boxed{\sqrt{0} = 0}, \quad \boxed{\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty}, \quad \boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0}, \quad \boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty}$$
3. *La fonction racine carrée* $r : x \mapsto \sqrt{x}$ *est dérivable sur* $]0, +\infty[$ *et*
$$\boxed{\forall x > 0,\ r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$
La fonction racine carrée <u>n'est pas dérivable en</u> $\underline{0}$.
4. *La fonction racine carrée est croissante sur* $\mathbb{R}^+$.
5. *Si* u *est une fonction définie et dérivable sur* I *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^+$, *alors*
$$\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

5.3.4 Fonction inverse

Définition 18

La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{1}{x}$$

Remarques :

R 1 – La fonction inverse est impaire sur $\mathbb{R}^*$

R 2 – On dit que la courbe de la fonction inverse est une **hyperbole**.

Proposition 19

1. *La fonction inverse est définie et continue sur* $]-\infty, 0[$ *et sur* $]0, +\infty[$.
2. *La fonction inverse est dérivable sur* $]-\infty, 0[$ *et sur* $]0, +\infty[$ *et :*

$$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[, \quad \boxed{f'(x) = \frac{-1}{x^2}}$$

3. *La fonction inverse est décroissante sur* $]-\infty, 0[$ *et décroissante sur* $]0, +\infty[$.
4. *Si* u *est une fonction définie et dérivable sur un intervalle* I *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^*$*, alors la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$ *est dérivable sur* I *et :*

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$$

Remarque :

Si u et v sont dérivables sur un intervalle I, avec v à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, alors la fonction $x \longmapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

5.3.5 Fonction logarithme népérien

Définition 20

La fonction ln est l'unique primitive qui s'annule en 1 de la fonction continue définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
La fonction ln

Remarques :

R 1 – Par définition, la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\boxed{\ln(1) = 0}$.

R 2 – La fonction ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\boxed{\forall x > 0, \quad \ln'(x) = \dfrac{1}{x}}$.

R 3 – La fonction logarithme est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

Remarques :

R 1 – Pour a et b strictement positifs, on a : $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$ et $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$ et :

$$\boxed{\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)} \quad \text{et} \quad \boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)}$$

R 2 – Si $xy > 0$, alors $\ln(xy) = \ln|x| + \ln(|y|)$ et $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln|x| - \ln|y|$.

R 3 – Pour $a > 0$ et x réel $\boxed{\ln(a^x) = x\ln(a)}$. En particulier, $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Proposition 21

Les limites usuelles à connaître pour la fonction ln *sont :*

1. *Les limites aux bornes du domaine de définition :* $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty}$ *et* $\boxed{\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty}$.
2. *Les limites dites de "croissances comparées" :* $\boxed{\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0}$, $\boxed{\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0}$.

   Plus généralement pour tous $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$, $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0$ *et* $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha(\ln(x))^\beta = 0$.
3. *Le taux d'accroissement en* 0 *de* $x \mapsto \ln(1+x)$ *:* $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1}$.

Remarque :

Si u est dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans $]0, +\infty[$, alors la fonction $x \longmapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et :

$$(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$$

5.3.6 Fonction exponentielle

Définition 22
La fonction $\ln : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction inversible : elle admet une fonction réciproque, qu'on appelle la **fonction exponentielle** : $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$. On la note $x \mapsto e^x$ ou $x \mapsto \exp(x)$.

Remarques :

- **R 1** – La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.
- **R 2** – Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)}$
- **R 3** – La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- **R 4** – Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\boxed{y = e^x \iff x = \ln(y)}$.
- **R 5** – Pour $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.
- **R 6** – On a $\boxed{\ln(e) = 1}$, $\boxed{e^1 = e \simeq 2.718}$ et $\boxed{e^0 = 1}$.

Remarques :

- **R 1** – Pour tous réels a et b, $e^a = e^b \iff a = b$ et $e^a < e^b \iff a < b$.
- **R 2** – Pour tous réels a et b, on a $\boxed{\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)}$ et $\boxed{\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}}$
- **R 3** – Pour tous réels a et b, on a $\boxed{e^{ab} = (e^a)^b = \left(e^b\right)^a}$
- **R 4** – Pour tout $a > 0$, on a $\boxed{a^x = e^{x\ln(a)}}$.

Proposition 23
Les limites usuelles à connaître pour la fonction $\exp$ *sont :*

1. *Les limites aux bornes du domaine de définition :* $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0}$ *et* $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$.
2. *Les limites dites de "croissances comparées" :* $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty}$, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0}$.

   Plus généralement pour tous $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0$.
3. *Le taux d'accroissement en* 0 *de* $\exp$ *:* $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1}$.

Remarque :

Si u est dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors la fonction $x \longmapsto \exp(u(x))$ est dérivable sur I et :

$$(\exp \circ u)' = u' \times \exp \circ u$$

5.3.7 Fonctions puissance

Définition 24

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction puissance f :

$$f(x) = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln(x)}$$

est définie pour tout $x > 0$.

Remarques :

R 1 – Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors la fonction $f(x) = x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$: c'est un cas particulier.

R 2 – Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, alors la fonction $f(x) = x^n$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

R 3 – Soit $x \in \mathbb{R}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^{n+1} = x^n \times x$ et par convention, $x^0 = 1$

R 4 – Pour tout $x \in \mathbb{R}$ non nul, on a : $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$

Proposition 25

La fonction f définie par $f(x) = x^{\alpha}$ est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}}$$

Remarques :

R 1 – Pour tous x et y strictement positifs, on a :

$$(xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha}, \quad \left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha} = \frac{x^{\alpha}}{y^{\alpha}}, \quad x^{\alpha+\beta}, \quad (x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta}$$

R 2 – Si on peut écrire $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, alors pour tout $x > 0$,

$$x^{\alpha} = x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Proposition 26

Soit la fonction f définie par $f(x) = u(x)^{v(x)}$, définie sur l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $u(x) > 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (tel que $u(x) > 0$), on a

$$f(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln(u(x))}$$

Si u et v sont des fonctions dérivables sur I avec $u(x) > 0$ sur I, alors

$$(u^v)' = (e^{v \ln(u)})' = (v \ln(u))' u^v$$