

On désignera par \mathbb{K} soit l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} , soit l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} .

4.1 L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

4.1.1 Définitions

Définition 1

On dit que P est un **polynôme de degré** n ($n \in \mathbb{N}$), à une indéterminée X et à coefficients dans \mathbb{K} s'il s'écrit sous la forme

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

avec $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_i \in \mathbb{K}$ et $a_n \neq 0$.

Le coefficient a_i s'appelle le **coefficient d'indice** i .

Remarques :

- R1** – Le **degré de** P que l'on note $\deg(P)$ est le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$. Le coefficient a_n est alors appelé le **coefficient dominant**.
- R2** – Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls : on note également le polynôme nul par 0. Par convention, $\deg(0) = -\infty$.
- R3** – Un polynôme que n'a qu'un seul coefficient non nul est appelé un **monôme**.
- R4** – L'indéterminée X peut être substituée par :
 - des valeurs réelles x (on dit alors qu'on a une **fonction polynomiale**)
 - des valeurs complexes z
 - des fonctions : $u(\theta) = \cos(\theta)$, $v(x) = e^x$, ...
- R5** – On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} ($\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$ si on sait dans quel corps se trouvent les coefficients).
- R6** – On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} et de degré inférieur ou égal à n :

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] / \deg(P) \leq n\}$$

Théorème 2**Théorème d'identification**

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et si leurs coefficients respectifs de même indice sont égaux.

$$\text{Si } P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k \text{ et } Q(X) = \sum_{k=0}^q b_k X^k,$$

$$P = Q \iff \begin{cases} p = q \\ \forall i \in \llbracket 0, p \rrbracket, a_i = b_i \end{cases}$$

4.1.2 Opérations**Proposition 3**

- La somme de deux polynômes est encore un polynôme. On additionne les coefficients de même degré. De plus,

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$: on dit que λ est un **scalaire** (un nombre). Alors si P est un polynôme, λP est encore un polynôme et

$$\deg(P) = \deg(\lambda P) \quad \text{si } \lambda \neq 0$$

Plus généralement, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$\alpha P + \beta Q \in \mathbb{K}_n[X]$$

On dit que $\mathbb{K}_n[X]$ est **stable par combinaison linéaire**.

- Le produit de deux polynômes est un polynôme. De plus,

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

Remarques :

R1 – Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$

R2 – Si $P(X) = a_p X^p + \dots + a_1 X + a_0$ (avec $a_p \neq 0$) et $Q(X) = b_q X^q + \dots + b_1 X + b_0$ (avec $b_q \neq 0$), alors

$$P(X)Q(X) = c_{p+q} X^{p+q} + \dots + c_k X^k + \dots + c_1 X + c_0$$

avec

$$\forall k \in \llbracket 0, p+q \rrbracket, c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0$$

(avec convention $a_j = 0$ si $j > p$ et $b_j = 0$ si $j > q$.)

R3 – Le coefficient dominant d'un produit de k polynômes est obtenu en multipliant les k coefficients dominants des polynômes.

R4 – L'ensemble des polynômes est **intègre** : il vérifie :

$$P(X)Q(X) = 0 \iff P = 0 \text{ ou } Q = 0$$

De plus, on a donc

$$\begin{cases} A(X)P(X) = A(X)Q(X) \\ A(X) \neq 0 \end{cases} \implies P = Q$$

4.1.3 Substitution par un polynôme

Définition 4

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et soit $Q \in \mathbb{K}[X]$.

On définit le polynôme $P(Q(X))$ (ou $P \circ Q(X)$) par : $(P \circ Q)(X) = P(Q(X)) = \sum_{k=0}^n a_k (Q(X))^k$ i.e. on substitue X dans P par $Q(X)$.

Remarques :

R1 – Si P et Q sont deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$, alors $\deg(P(Q(X))) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

R2 – Un polynôme P peut donc être noté indifféremment P ou $P(X)$.

4.1.4 Dérivation

Définition 5

Soit P un polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ On définit son **polynôme dérivé**, noté P' par :

$$P'(X) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$$

Remarques :

R1 – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme dérivé de X^n est donc nX^{n-1}

R2 – Le polynôme dérivé d'un polynôme constant (éventuellement nul) est le polynôme nul.

R3 – Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$(P + Q)' = P' + Q', \quad (\lambda P)' = \lambda P', \quad (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$$

R4 – Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $(PQ)' = P'Q + PQ'$

R5 – Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $(P \circ Q)' = (P' \circ Q) \times Q'$.

Proposition 6

Un polynôme est indéfiniment dérivable. On écrit $P^{(k)}$ le polynôme obtenu quand on a dérivé successivement k fois le polynôme P :

$$P^{(0)} = P, \quad P^{(1)} = P', \quad \forall k \geq 1, \quad P^{(k)} = (P^{(k-1)})' = (P')^{(k-1)}$$

Exemple :

La dérivée k -ième du polynôme X^n est :

$$(X^n)^{(k)} = \begin{cases} n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) X^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Remarque :

Si $\deg(P) = n$, alors pour tout $k > n$, on a $P^{(k)} = 0$.

4.2 Division dans $\mathbb{K}[X]$

4.2.1 Divisibilité

Définition 7

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que A **divise** B ou que B **est un multiple de** A s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$B = AQ$$

On dit alors que B **est factorisable par** B .

Remarques :

R1 – Si $B = \lambda A$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que A et B sont **proportionnels**.

R2 – Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on a $P = \frac{1}{\lambda}(\lambda P)$.

Ainsi, tous les polynômes constants non nuls $Q = \mu = \frac{1}{\lambda}$ (avec $\lambda \neq 0$) et les polynômes non nuls proportionnels à $P : \lambda P(X)$, sont des diviseurs de P .

R3 – On dit que P est **irréductible** si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants et les polynômes proportionnels à P .

R4 – Les polynômes de degré 0 et de degré 1 sont toujours irréductibles.

4.2.2 Division euclidienne

Théorème 8

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et soit $B \in \mathbb{K}[X]$ non nul. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

Q est appelé le **quotient**, et R le **reste**, dans la division euclidienne de A par B .

Démonstration :

On admettra l'existence de l'écriture $A = BQ + R$.

Montrons l'unicité. Supposons qu'il existe deux couples $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $(Q', R') \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que

$$\begin{cases} A = BQ + R = BQ' + R' \\ \deg(R) < \deg(B) \\ \deg(R') < \deg(B) \end{cases}$$

On a donc $B(Q - Q') = R' - R$.

Supposons qu'on ait $Q - Q' \neq 0$.

Alors, on aurait $\deg(R' - R) = \deg(B(Q - Q')) = \deg(B) + \deg(Q - Q') \geq \deg(B)$.

Or, on sait que $\deg(R' - R) \leq \max(\deg(R'), \deg(R)) < \deg(B)$. On arrive à une contradiction

On a donc nécessairement $Q - Q' = 0$, et on en déduit alors que $R - R' = 0$.

Remarque :

Le polynôme B divise le polynôme A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est le polynôme nul.

4.2.3 Racines d'un polynôme

Définition 9

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une **racine de P** si $P(a) = 0$.

Proposition 10

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $a \in \mathbb{K}$

$$P(a) = 0 \iff \exists! Q \in \mathbb{K}[X] / P(X) = (X - a)Q(X)$$

Démonstration :

On regarde la division euclidienne de P par $X - a$:

$$\exists!(Q, \alpha) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K} / P(X) = (X - a)Q(X) + \alpha$$

On prend en a : on a $P(a) = 0 + \alpha$, donc

$$P(X) = (X - a)Q(X) + P(a)$$

En particulier, le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est donc $P(a)$.

Ainsi, $(X - a) | P$ si et seulement si $P(a) = 0$.

Remarques :

R1 – Si on sait qu'on a une racine, on sait donc qu'on peut factoriser notre polynôme. Il peut donc être utile de chercher des racines évidentes.

R2 – On peut généraliser le résultat à n racines distinctes :

$$P(a_1) = P(a_2) = \dots = P(a_n) = 0 \iff \exists! Q \in \mathbb{K}[X] / P(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_n)Q(X)$$

4.2.4 Racines multiples

Définition 11

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une **racine multiple d'ordre k de P** si

$$(X - a)^k \text{ divise } P \quad \text{et} \quad (X - a)^{k+1} \text{ ne divise pas } P$$

Autrement dit, $\exists! Q \in \mathbb{K}[X] / P(X) = (X - a)^k Q(X)$ avec $Q(a) \neq 0$.

Théorème 12

$$a \text{ racine d'ordre } k \text{ de } P \iff \begin{cases} P(a) = 0 \\ P'(a) = 0 \\ \vdots \\ P^{(k-1)}(a) = 0 \\ P^{(k)}(a) \neq 0 \end{cases}$$

4.2.5 Décomposition dans $\mathbb{K}[X]$

Théorème 13

Théorème de D'Alembert-Gauss

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. Alors P admet toujours au moins une racine dans \mathbb{C} . Plus généralement, Tout polynôme P de degré n dans $\mathbb{C}[X]$ admet n racines complexes comptées avec multiplicité, et on peut écrire :

$$P(X) = \lambda(X - a_1)^{\alpha_1}(X - a_2)^{\alpha_2} \dots (X - a_p)^{\alpha_p}$$

avec $\lambda \neq 0$ le coefficient dominant, et $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = n$.

Remarques :

R1 – Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 0 et de degré 1.

R2 – Tout polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul.

R3 – Si P est à coefficients tous réels (i.e. $P \in \mathbb{R}[X]$), alors pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\alpha \text{ racine de } P \iff \bar{\alpha} \text{ racine de } P$$

R4 – Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 0, de degré 1, et les polynômes de degré 2 n'ayant pas de racines réelles.