CHAPITRE 3

# Nombres complexes

## 3.1 Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

### 3.1.1 Définitions

**Définition 1**

On appelle **ensemble des nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres qui s'écrivent sous la forme

$$a + ib, \qquad \text{avec } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

où $i$ est un nombre imaginaire qui vérifie $i^2 = -1$.
Si $z = a + ib$ est un nombre complexe, le couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est alors unique :

- le réel $a$ s'appelle la **partie réelle de $z$**, notée $a = \mathrm{Re}(z)$.
- le réel $b$ s'appelle la **partie imaginaire de $z$**, notée $b = \mathrm{Im}(z)$.

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes partie réelle et partie imaginaire.

**Remarques :**

**R 1** – Cette représentation sous la forme $a + ib$ d'un nombre complexe s'appelle la **forme algébrique** du nombre complexe.

**R 2** – Les nombres réels sont des nombres complexes qui ont une partie imaginaire nulle.

**R 3** – Les nombres complexes de la forme $ib$ sont eux appelés des **imaginaires purs**.

**R 4** – On peut agir sur les nombres complexes comme sur les réels : les règles de développement et de factorisation sont encore vraies, il faut juste utiliser que $i^2 = -1$.

**R 5** – On peut additionner deux nombres complexes :

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

**R 6** – On peut aussi multiplier deux nombres complexes :

$$(a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

### 3.1.2 Conjugué

**Définition 2**
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle **nombre complexe conjugué de $z$** le complexe, noté $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = a - ib$.

**Proposition 3**
*Soient $z = a + ib$ et $z' = a - ib$ deux nombres complexes. Alors*

1. $\boxed{z \times \overline{z} = a^2 + b^2}$ *: c'est toujours un réel positif.*
2. $\boxed{Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}}$ *et* $\boxed{Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}}$
3. $\overline{\overline{z}} = z$
4. *$z$ est un nombre réel* $\Longleftrightarrow z = \overline{z}$ *et* *$z$ est un imaginaire pur* $\Longleftrightarrow z = -\overline{z}$
5. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ *et* $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

**Remarque :**

On peut aussi définir l'inverse d'un nombre complexe (non nul) en s'aidant du conjugué :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{1}{a + ib} \times \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2}$$

### 3.1.3 Module d'un nombre complexe

**Définition 4**
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Alors, on appelle **module de $z$** le réel positif noté $|z|$ défini par

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Proposition 5**
*Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes. Alors*

1. $\boxed{z \times \overline{z} = |z|^2}$
2. $|z| = |\overline{z}|$
3. $Re(z) \leqslant |z|$ *et* $Im(z) \leqslant |z|$
4. $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

**Théorème 6** ***Inégalité triangulaire***
*Pour tous nombres complexes $z$ et $z'$ dans $\mathbb{C}$, on a* $\boxed{|z + z'| \leqslant |z| + |z'|}$.

**Démonstration :**

$|z + z'|^2 = (z + z')\overline{(z + z')} = z\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z'} + \overline{z}z' = |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leqslant |z|^2 + |z'|^2 + 2|zz'| = (|z| + |z'|)^2$
D'où le résultat en passant à la racine carrée des deux côtés, on a bien l'inégalité voulue.

### 3.1.4 Exponentielle exponentielle

**Définition 7**

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1 et de centre 0. Ce cercle correspond à l'ensemble

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$$

On repère chaque point de $\mathcal{C}$ par un angle $\theta = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$ (angle avec l'axe horizontal). Ce point a donc pour coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Ainsi pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{U}$,

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \ / \ z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

On dit que $\theta$ est un **argument** du nombre complexe $z$.

**Remarques :**

- **R 1** – Si on a un nombre complexe quelconque $z$ non nul, on peut donc lui définir un argument, qui sera celui de $\dfrac{z}{|z|}$.
- **R 2** – Un nombre complexe $z$ (non nul) est donc complètement défini par son module $\rho = |z|$ et un de ses arguments $\theta$.

**Définition 8**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $e^{i\theta}$ le nombre complexe égal à : $\boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$. Si $z = a + ib$, on peut noter plus généralement l'exponentielle du nombre complexe $z$ par

$$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a\left(\cos(b) + i\sin(b)\right)$$

**Remarques :**

- **R 1** – Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta})}$ et $\boxed{\sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta})}$.
- **R 2** – Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta}$
- **R 3** – $|e^{i\theta}| = 1$
- **R 4** – $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

**Théorème 9** ***Formule de Moivre***

*Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a* $\boxed{(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}}$.

*Autrement dit, on a :* $\boxed{(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$.

**Théorème 10** ***Formules d'Euler***

*Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}, \qquad \boxed{\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

### 3.1.5 Forme trigonométrique

**Définition 11**

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle **argument** de $z$ tout réel $\theta$ qui vérifie

$$\boxed{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta}}$$

On note $\arg(z)$ un tel réel. L'écriture $z = |z|e^{i\arg(z)}$ est appelée la **forme trigonométrique** (ou **forme exponentielle**) de $z$.

**Proposition 12**

*Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes, alors*

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \exists k \in \mathbb{Z} \;/\; \arg(z) = \arg(z') + 2k\pi \end{cases}$$

## 3.2 Equations dans $\mathbb{C}$

### 3.2.1 Factorisations dans $\mathbb{C}$

**Proposition 13** — *Formule du binôme de Newton*

*Soient $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes et soit $n \in \mathbb{N}$, alors*

$$\boxed{(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}}$$

**Proposition 14** — $a^n - b^n$

*Soient $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes et soit $n \in \mathbb{N}$, alors*

$$\boxed{z_1^n - z_2^n = (z_1 - z_2) \sum_{k=0}^{n-1} z_1^k z_2^{n-1-k}}$$

**Démonstration :**

Il suffit de développer le second membre et on obtient le membre de gauche.

### 3.2.2 Racines $n$-ièmes dans $\mathbb{C}$

**Définition 15**

Soit $Z \in \mathbb{C}^*$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine $n$-ième de $Z$** tout nombre $z$ qui vérifie $z^n = Z$.

**Remarques :**

- **R 1** – Si $n = 2$, on appelle racine carrée d'un nombre complexe, tout nombre $z$ qui vérifie $z^2 = Z$. Par exemple, $i$ est une racine carrée de $-1$.
- **R 2** – On n'écrit JAMAIS $\sqrt{z}$ pour $z$ complexe (sauf si c'est un réel positif)

**Théorème 16** ***Racines $n$-ièmes de 1***

*Les $n$ racines $n$-ièmes de 1 sont exactement les nombres*

$$\boxed{\omega_k = \exp\left(ik\frac{2\pi}{n}\right), \quad k \in [\![0, n-1]\!]}$$

*Il y en a donc exactement $n$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n$-ièmes de 1.*

**Démonstration :**

Cherchons $z$ sous sa forme trigonométrique $z = \rho e^{i\theta}$. Alors

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\iff \rho^n e^{in\theta} = 1e^{i0} \\ &\iff \left\{ \rho^n = 1\exists k \in \mathbb{Z} \ / \ n\theta = 2k\pi \right. \\ &\iff \left\{ \rho = 1\exists k \in \mathbb{Z} \ / \ z = \exp\left(ik\tfrac{2\pi}{n}\right) = \omega_k \right. \end{aligned}$$

De plus, cherchons les racines $n$-ièmes égales pour en garder le minimum :

$$\begin{aligned} \omega_k = \omega_\ell &\iff \exists p \in \mathbb{Z} \ / \ \frac{2k\pi}{n} = \frac{2\ell\pi}{n} + 2p\pi \\ &\iff \exists p \in \mathbb{Z} k = \ell + pn \end{aligned}$$

Donc $\omega_k$ et $\omega_\ell$ sont distincts si et seulement si $\ell$ et $k$ diffèrent d'un multiple de $n$. On peut donc se restreindre à prendre $n$ $\omega_i$ "consécutifs" qui seront donc bien distincts (par exemple $i \in [\![0, n-1]\!]$) et on obtient bien toutes les racines $n$-ièmes de 1.

**Proposition 17**

*Tout nombre complexe non nul $Z$ possède exactement $n$ racines $n$-ièmes distinctes.*
*Si on connait une des racines (par exemple $z_0 = \sqrt[n]{|Z|}e^{iarg(Z)/n}$), on obtient toutes les racines en multipliant $z_0$ par les $n$ racines de l'unité.*

**Proposition 18**

*Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme des $n$ racines $n$-ièmes de l'unité est nulle. Autrement dit*

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = 0}$$

**Démonstration :**

En effet, on obtient une somme de termes d'une suite géométrique. Notons $q = \omega_1 = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$. Alors, on a pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\omega_k = q^k$. Ainsi, puisque $q \neq 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} = 0$.

**Remarques :**

- **R 1** – On a $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$
- **R 2** – On a $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ avec $j = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right)$. On a en particulier : $\boxed{1 + j + j^2 = 0}$.
- **R 3** – On a $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$ avec $i^2 = -1$

**Démonstration :**

En effet, si on pose $z_0 = \sqrt[n]{|Z|}e^{i\arg(Z)/n}$, on a bien $z_0^n = |Z|e^{i\arg(Z)} = Z$, donc $z_0$ est bien une racine $n$-ième de $Z$.
Cherchons donc maintenant toutes les autres. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} z^n = Z &\iff z^n = z_0^n \\ &\iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \\ &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \ / \ \frac{z}{z_0} = \omega_k \\ &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \ / \ z = z_0\omega_k \end{aligned}$$

Et les $\omega_k$ étant bien deux à deux distincts pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, le nombre complexe $Z$ admet exactement $n$ racines $n$-ièmes dans $\mathbb{C}$.

**Remarque :**

Soit $Z$ un nombre complexe dont on cherche les racines carrées.

- Si on connaît $Z$ sous forme exponentielle, $Z = \rho e^{i\theta}$ ($\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$), alors les racines carrées sont exactement $\pm\sqrt{\rho}e^{i\theta/2}$.
- Si on connaît $Z$ sous forme algébrique, $Z = X + iY$, si on cherche les racines carrées $z$ sous la forme $z = x + iy$, on a :

$$z^2 = Z \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = X \\ x^2 + y^2 = \sqrt{X^2 + Y^2} \\ 2xy = Y \end{cases}$$

  Les deux premières équations donnent $x^2$ et $y^2$ et la dernière équation donne le signe des couples solution $(x, y)$.

### 3.2.3 Equation du second degré

**Théorème 19**

*On considère l'équation*

$$(E) : az^2 + bz + c = 0$$

*où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$.*
*On appelle* ***discriminant de l'équation*** $(E)$ *le complexe* $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$.
*Alors, si on note $\delta$ et $-\delta$ les racines carrées de $\Delta$ dans $\mathbb{C}$, les solutions de $(E)$ dans $\mathbb{C}$, sont*

$$\frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b+\delta}{2a}$$

*qui sont égales si $\Delta = 0$*

**Démonstration :**

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2}\right] = a\left(z + \frac{b-\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b+\delta}{2a}\right) \end{aligned}$$

**Proposition 20**

*Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Notons $z_1$ et $z_2$ les deux solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$. Alors*

$$\boxed{z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}}, \qquad \boxed{z_1 z_2 = \frac{c}{a}}$$

**Démonstration :**

On sait que $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) = az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1z_2$. On identifie alors les coefficients et on trouve les relations voulues.

## 3.3 Trigonométrie

### 3.3.1 Fonctions trigonométriques

**Proposition 21**

*Les fonctions* cos *et* sin*, définies sur $\mathbb{R}$ vérifient :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1} \text{ et } \boxed{-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1}$$

**Démonstration :**

Cela vient de la définition : ce sont les coordonnées du point sur le cercle trigonométrique. Les abscisses et ordonnées sont donc toujours dans $[-1, 1]$ et le théorème de Pythagore nous donne la deuxième relation.

**Définition 22**

On appelle **fonction tangente**, la fonction tan définie par l'expression :

$$\boxed{\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}$$

Elle est définie partout où $\cos(x) \neq 0$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

**Valeurs remarquables**

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos(x)$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\sin(x)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\tan(x)$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $\star\star$ |

### 3.3.2 Propriétés trigonométriques

**Proposition 23**

*Pour tout $x$ réel tel que les expressions suivantes existent, on a :*

$$\begin{array}{c|c|c}
\cos(-x) = \cos(x) & \sin(-x) = -\sin(x) & \tan(-x) = -\tan(x) \\
\cos(x+2\pi) = \cos(x) & \sin(x+2\pi) = \sin(x) & \tan(x+\pi) = \tan(x) \\
\cos(x+\pi) = -\cos(x) & \sin(x+\pi) = -\sin(x) & \tan(\pi - x) = -\tan(x) \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) & \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)} \\
\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) & \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) & \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(x)}
\end{array}$$

**Proposition 24**

*La fonction cosinus est $2\pi$-périodique et paire sur $\mathbb{R}$.*
*La fonction sinus est $2\pi$-périodique et impaire sur $\mathbb{R}$.*
*La fonction tangente est $\pi$-périodique et impaire sur son domaine de définition.*

**Proposition 25**

*Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$\cos(x) = \cos(y) \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = y + 2k\pi \\ ou \\ \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = -y + 2k\pi \end{cases}$$

$$\sin(x) = \sin(y) \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = y + 2k\pi \\ ou \\ \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = \pi - y + 2k\pi \end{cases}$$