CHAPITRE 1

Suites, sommes et récurrences

1.1 Généralités sur les suites

Définition 1

Soit $p \geqslant 1$. Soient $u_1, u_2, \dots, u_p$ des réels. On appelle **p-liste** (ou **suite finie**) la suite $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ qu'on peut noter $(u_n)_{1 \leqslant n \leqslant p}$.

Remarques :

- **R 1** – Une p-liste s'appelle aussi un **p-uplet**. L'ordre entre les réels de la suite est important. L'entier p est appelé la **longueur** de la suite.
- **R 2** – Si $p = 2$, on dit qu'on a un **couple** (u_1, u_2). Si $p = 3$, on dit qu'on a un **triplet** (u_1, u_2, u_3).
- **R 3** – Soit $n \in [\![1, p]\!]$, le réel u_n est appelé **terme d'indice n** de la suite (u_n).
- **R 4** – Attention : ne pas confondre le terme u_n et la suite (u_n).

Définition 2

Soient $u_1, u_2, \dots$ des réels. On dit que la liste (infinie) $(u_1, u_2, u_3, \dots)$ est une **suite numérique**, qu'on note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou $(u_n)_{n \geqslant 1}$.

Remarques :

- **R 1** – Une suite peut commencer également à partir de u_0 !
- **R 2** – Une suite peut être explicite : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$.
  Le symbole "$\forall$" signifie "Pour tout" ou "Quelque soit"
- **R 3** – Une suite peut être définie par une formule de récurrence : $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1, \quad u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n + 4 \end{array} \right.$
- **R 4** – Une suite peut etre définie de manière implicite :
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est l'unique solution positive de l'équation $-1 + nx + x^2 + n^2x^3 = 0$.

Définition 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

- La suite (u_n) est dite **croissante** si $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}}$.
- La suite (u_n) est dite **décroissante** si $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n}$.
- Si les inégalités sont strictes, on dit que la suite (u_n) est **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.

Exemples :

E 1 – Il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes. Par exemple, la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n$$

E 2 – Une suite est dite **croissante à partir d'un certain rang k** lorsque $\forall n \geqslant k, \quad u_n \leqslant u_{n+1}$.
De même, une suite est dite **décroissante à partir d'un certain rang k** lorsque $\forall n \geqslant k, \quad u_n \geqslant u_{n+1}$.

Remarques :

R 1 – Pour étudier si une suite (u_n) est monotone, on étudie le signe de la différence entre deux termes consécutifs, i.e. on regarde le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

R 2 – Si une suite (u_n) est à termes <u>tous strictement positifs</u>, i.e. si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$, alors,

$$(u_n) \text{ est croissante } \iff \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1, \qquad (u_n) \text{ est décroissante } \iff \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$$

Définition 4

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que

- (u_n) est **majorée** si
$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M}$$
- (u_n) est **minorée** si
$$\boxed{\exists m \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n}$$
- (u_n) est **bornée** si
$$\boxed{\exists m, M \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M}$$
ou de manière équivalente si
$$\boxed{\exists k \in \mathbb{R}^+ \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant k}$$

Remarques :

R 1 – Un réel m (resp. un réel M) qui vérifie les inégalités précédentes est appelé un **minorant** (resp. un **majorant**) de la suite (u_n).

R 2 – Le symbole "$\exists$" signifie "il existe" et le symbole "/" signifie "tel que".

R 3 – Attention, l'ordre des symboles mathématiques a une importance : la phrase

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists M \in \mathbb{R} \ / \ u_n \leqslant M$$

est toujours vraie, et ne signifie absolument pas qu'une suite est majorée.

1.2 Raisonnement par récurrence

Proposition 5 ***Principe de récurrence***

Soit $(\mathcal{P}(n))$ une proposition dépendant de l'entier naturel n.
Pour montrer que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, il suffit de démontrer que :

- *la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.*
- *pour n'importe quel entier $n \geqslant 0$ fixé, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie également.*

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2}$.
<u>Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.</u>

Notons donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$: "$0 \leqslant u_n \leqslant 1$".

- Pour $n = 0$, vérifions que la propriété est vraie :
  On a par définition $u_0 = 0$, donc on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$: la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
  On sait que $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2}$. Puisqu'on a supposé que $u_n \geqslant 0$, alors u_{n+1} est le quotient de deux nombres positifs, donc est encore positif. De plus, on sait que $u_n + 1 \leqslant u_n + 2$, donc $\dfrac{u_n + 1}{u_n + 2} \leqslant 1$. On a donc bien que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
- Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Proposition 6 ***Principe de récurrence double***

Soit $(\mathcal{P}(n))$ une proposition dépendant de l'entier naturel n.
Pour montrer que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, il suffit de démontrer que :

- *les propositions $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.*
- *pour n'importe quel entier $n \geqslant 0$, si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie également.*

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
<u>Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 2^n + 3^n$.</u>

Notons donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$: "$0 \leqslant u_n \leqslant 1$".

- Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$, et également $2^0 + 3^0 = 1 + 1 + 2$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Pour $n = 1$, on a $u_1 = 5$, et également $2^1 + 3^1 = 2 + 3 + 5$: $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que les propriétés $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+2)$ est encore vraie.
  On a supposé que $u_n = 2^n + 3^n$ et que $u_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}$. Alors :
  $$u_{n+2} = 5\left(2^{n+1} + 3^{n+1}\right) - 6\left(2^n + 3^n\right) = 2^n\left(2 \times 5 - 6\right) + 3^n\left(3 \times 5 - 6\right) = 2^n \times 4 + 3^n \times 9 = 2^{n+2} + 3^{n+2}$$
  La propriété $\mathcal{P}(n+2)$ est encore vraie.
- Par récurrence double, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

1.3 Symbole $\sum$

1.3.1 Propriétés

Définition 7

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $u_0, u_1, u_2, \dots, u_p$ des réels. La somme $S = u_0 + u_1 + +u_2 + \dots + u_p$ se note aussi

$$S = \sum_{k=0}^{p} u_k$$

Remarque :

La lettre n peut en réalité être remplacée par n'importe quelle autre lettre (qui n'est pas déjà utilisée !). On dit que c'est une **lettre muette**, appelée l'**indice de sommation**. On peut ainsi écrire :

$$S = \sum_{k=0}^{p} u_k = \sum_{n=0}^{p} u_n = \sum_{j=0}^{p} u_j$$

Proposition 8

Soient $p \in \mathbb{N}$ et soient $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p$ des réels. Alors

- $$\sum_{k=1}^{p} (u_k + v_k) = \sum_{k=1}^{p} u_k + \sum_{k=1}^{p} v_k$$
- *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*
$$\sum_{k=1}^{p} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=1}^{p} u_k$$
- $$\sum_{k=1}^{p} 1 = p$$

Remarques :

R 1 – Attention aux valeurs minimale et maximale de l'indice de sommation. On a par exemple

$$\sum_{k=1}^{100} 1 = 100, \qquad \sum_{k=0}^{100} 1 = 101$$

R 2 – Il peut être parfois utile de réécrire une somme en changeant l'indice de sommation : pas forcément la lettre muette, mais la manière de numéroter les termes de la somme. Par exemple, les sommes ci-dessous sont en réalité les mêmes :

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{p+1} \frac{1}{k-1} = \sum_{k=3}^{p+2} \frac{1}{k-2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}$$

R 3 – Parfois certaines sommes peuvent se simplifier en dominos : c'est le cas lorsque le terme dans la somme est de la forme $v_{n+1} - v_n$:

$$\sum_{k=1}^{p} (v_{k+1} - v_k) = (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \dots + (v_{p+1} - v_p) = v_{p+1} - v_1$$

On dit qu'on a une **somme télescopique**

1.3.2 Sommes classiques

Théorème 9 ***Somme des entiers, des carrés, des cubes***

Soit n un entier naturel. On a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}, \qquad \boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}, \qquad \boxed{\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

Démonstration :

1. - Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: "$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$".
   - Pour $n = 0$, vérifions que la propriété est vraie. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \geqslant 0$. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, i.e. montrons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Alors

   $$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) \overset{\boxed{\text{HR}}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

   - Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.
2. - Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: "$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$".
   - Pour $n = 0$, vérifions que la propriété est vraie. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 = \frac{0(0+1)(0+1)}{6}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \geqslant 0$. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, i.e. montrons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. Alors

   $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 &\overset{\boxed{\text{HR}}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left(n+1+\frac{n(2n+1)}{6}\right) \\ &= (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

   - Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.
3. - Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: "$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$".
   - Pour $n = 0$, vérifions que la propriété est vraie. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0 = \frac{0^2(0+1)^2}{4}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \geqslant 0$. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, i.e. montrons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$. Alors

   $$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{\boxed{\text{HR}}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

   - Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Théorème 10 ***Somme des puissances***

Soit n un entier naturel et soit q un réel <u>différent de 1</u>. Alors :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

Démonstration :

- Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: "$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-a}$".
- Pour $n = 0$, vérifions que la propriété est vraie. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} q^k = 1 = \frac{1-q}{1-q}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, i.e. montrons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \overset{\boxed{\text{HR}}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

- Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

1.3.3 Produit : symbole $\prod$

Définition 11

Soient $u_1, u_2, \dots, u_p$ des réels. on note leur produit $u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_p = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} u_k$.

Un cas particulier, le produit $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ se note $n!$ et se prononce "**factorielle n**".

Remarque :

Les règles de changements d'indices marchent de la manière identique que pour les sommes

1.4 Suites classiques

1.4.1 Suites arithmétiques

Définition 12

Une suite (u_n) de réels est dite **arithmétique** si $\boxed{\exists r \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r}$.

Le réel r est appelé la **raison** de la suite (u_n).

Remarque :

Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $u_{n+1} - u_n$ ne dépend pas de n.

Proposition 13

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr}$

Remarque :

> Si le premier terme de la suite est u_1, le résultat devient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = u_1 + (n-1)r}$.

Proposition 14

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, alors pour tous $p, n \in \mathbb{N}$, $p \leqslant n$,

$$\boxed{u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}}$$

En particulier

$$\boxed{u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}}$$

1.4.2 Suites géométriques

Définition 15

Une suite (u_n) de réels est dite **géométrique** si $\boxed{\exists q \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n}$.
Le réel q est appelé la **raison** de la suite (u_n).

Remarque :

> Pour montrer qu'une suite (u_n) est géométrique, il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ ne dépend pas de n.

Proposition 16

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n}$

Remarque :

> Si le premier terme de la suite est u_1, le résultat devient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = u_1 q^{n-1}}$.

Proposition 17

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, alors pour tous $p, n \in \mathbb{N}$, $p \leqslant n$,

$$\boxed{u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = \begin{cases} u_p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n-p+1)u_p & \text{si } q = 1 \end{cases}}$$

En particulier

$$\boxed{u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n+1)u_0 & \text{si } q = 1 \end{cases}}$$

1.4.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 18

Une suite (u_n) de réels est dite **arithmético-géométrique** si

$$\boxed{\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b}$$

Remarques :

R 1 – Une suite arithmétique est une suite arithmético-géométrique ($a = 1$ et $b = r$)

R 2 – Une suite géométrique est une suite arithmético-géométrique ($a = q$ et $b = 0$)

R 3 – Soit (u_n) est une suite arithmético-géométrique. Pour obtenir une forme explicite de chaque terme u_n, on applique la méthode suivante :

- On cherche (s'il existe) $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = a\ell + b$ (c'est le **point fixe**)
- Alors, la suite (v_n) définie par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \ell$$
est géométrique de raison a.
- On en déduit alors facilement une expression de v_n en fonction de n.
- On en déduit alors une expression de u_n en fonction de n.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$
La suite (u_n) est arithmético-géométrique.
Déterminons alors une formule explicite pour chaque terme u_n ($n \in \mathbb{N}$).

- $$\ell = 2\ell - 3 \Longleftrightarrow \ell = 3$$
- On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - 3$. On a alors :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = (2u_n - 3) - 3 = 2u_n - 6 = 2(u_n - 3) = 2v_n$$
La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 2.
- On en déduit donc que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times 2^n = (u_0 - 3) \times 2^n = -2^n$.
- Puisqu'on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 + v_n$, on en déduit donc finalement que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 - 2^n$$