$\boxed{1}$ Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ le système $\left\{\begin{array}{ll} \lambda x + y & = 1 \\ x + \lambda y & = 1 \end{array}\right.$ admet-il dans $\mathbb{R}^2$ aucune solution ? une unique solution ? une infinité de solutions ?

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé.

$$\begin{aligned}
(S) &\iff \left\{\begin{array}{ll} \lambda x + y & = 1 \\ x + \lambda y & = 1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ll} x + \lambda y & = 1 \\ \lambda x + y & = 1 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftrightarrow L_2 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rl} x + \lambda y & = 1 \\ (1-\lambda^2) y & = 1 - \lambda \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rl} x + \lambda y & = 1 \\ (1-\lambda)(1+\lambda) y & = (1 - \lambda) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

- **1er cas :** $\lambda = 1$. Alors

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rl} x + y & = 1 \\ 0 & = 0 \end{array}\right. \iff y = 1 - x$$

Ainsi $\boxed{\mathcal{S} = \{(x, 1-x),\ x \in \mathbb{R}\}}$.

- **2ème cas :** $\lambda \neq 1$. Alors

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rl} x + \lambda y & = 1 \\ (1-\lambda)(1+\lambda) y & = (1 - \lambda) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x + \lambda y & = 1 \\ (1+\lambda) y & = 1 \end{array}\right.$$

  - **Cas A :** $\lambda = -1$. Alors

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rl} x - y & = 1 \\ 0 & = 1 \end{array}\right.$$

  Ainsi $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$

  - **Cas B :** $\lambda \neq -1$. Alors

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rl} x + \lambda y & = 1 \\ y & = \dfrac{1}{1+\lambda} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x & = 1 - \lambda y = 1 - \dfrac{\lambda}{1+\lambda} = \dfrac{(1+\lambda) - \lambda}{1+\lambda} = \dfrac{1}{1+\lambda} \\ y & = \dfrac{1}{1+\lambda} \end{array}\right.$$

  Ainsi $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\left(\dfrac{1}{1+\lambda}, \dfrac{1}{1+\lambda}\right)\right\}}$.

En conclusion :
- Si $\lambda = 1$, il y a une infinité de solutions.
- Si $\lambda = -1$, il n'y a pas de solution.
- Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, il y a une unique solution.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 2x+y+z &= 5 \\ 2x+13y-7z &= -1 \\ x-y+z &= 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+3y-7z+t &= 1 \\ 2x+2y+z+2t &= 0 \\ x-y-2z+t &= -1 \\ x+7y-4z+t &= 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y+z+t &= 11 \\ 2x+y+z+t &= 2 \\ x+2y+2z &= 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 3x+2y &= 14 \\ x-2z &= 14 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -x+2y+3z &= 2 \\ 4x+5y+6z &= 0 \\ 7x+8y+9z &= 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x-4y+2z+t &= 1 \\ y+z-t &= 0 \\ -3x+6y-3t &= -1 \end{cases}$

1.

$$\begin{cases} 2x+y+z &= 5 \\ 2x+13y-7z &= -1 \\ x-y+z &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y+z &= 1 \\ 2x+y+z &= 5 \\ 2x+13y-7z &= -1 \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow L_3 \leftarrow L_2 \leftarrow L_1$$

$$\iff \begin{cases} x-y+z &= 1 \\ 0+3y-z &= 3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 15y-9z &= -3 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-y+z &= 1 \\ 0+3y-z &= 3 \\ -4z &= -18 & L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= -1 \\ 0+y &= \frac{5}{2} \\ z &= \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(-1, \frac{5}{2}, \frac{9}{2} \right) \right\}$$

2.

$$\begin{cases} x+3y-7z+t &= 1 \\ 2x+2y+z+2t &= 0 \\ x-y-2z+t &= -1 \\ x+7y-4z+t &= 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x+3y-7z+t &= 1 \\ -4y+15z &= -2 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -4y+5z &= -2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ 4y+3z &= 2 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+3y-7z+t &= 1 \\ -4y+15z &= -2 \\ -10z &= 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ 18z &= 0 & L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t &= \frac{-1}{2} - x \\ y &= \frac{1}{2} \\ z &= 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(x, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} - x \right),\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

3.

$$\begin{cases} x+y+z+t &= 11 \\ 2x+y+z+t &= 2 \\ x+2y+2z &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z+t &= 11 \\ x &= -9 \\ y+z-t &= -10 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} y+z+t &= 20 \\ x &= -9 \\ y+z-t &= -10 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2t &= 30 \\ x &= -9 \\ y+z &= -10+t \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\iff \begin{cases} t &= 15 \\ x &= -9 \\ y &= 5-z \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{(-9, 5-z, z, 15),\ z \in \mathbb{R}\}$$

4.

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 3x+2y &= 14 \\ x-2z &= 14 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ -y-3z &= 11 \\ -y-3z &= 13 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

5.

$$\begin{cases} -x+2y+3z &= 2 \\ 4x+5y+6z &= 0 \\ 7x+8y+9z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x+2y+3z &= 2 \\ 5x+3y+3z &= -2 \\ 3x+3y+3z &= 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x+2y+3z &= 2 \\ 2x &= -2 \\ x+y+z &= 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2y+3z &= 1 \\ x &= -1 \\ y+z &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z &= -1 \\ x &= -1 \\ y+z &= 2 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$$

$$\mathcal{S} = \{(-1, 2, -1)\}$$

6.

$$\begin{cases} 3x-4y+2z+t &= 1 \\ y+z-t &= 0 \\ -3x+6y-3t &= -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x-4y+2z+t &= 1 \\ y+z-t &= 0 \\ -2y+2z-2t &= 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\iff \begin{cases} 3x &= 1+4y-2z-t \\ y &= t-z \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\iff \begin{cases} x &= \frac{1}{3}+t-2z \\ y &= t-z \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{3} - 2z + t, t-z, z, t \right),\ z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en fonction du paramètre réel m, les systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{rl} (1+m^2)x-3y & =5 \\ 4y+3z & =8 \\ mz & =4 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{rl} mx+y+z & =m^2 \\ x+my-mz & =m \\ x-y+mz & =1 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{rl} x+y+z & =2 \\ 2x+6y-4z & =2 \\ -3x-9y+6z & =m-5 \end{array}\right.$

1. $(S)\ :\left\{\begin{array}{rl} (1+m^2)x-3y & =5 \\ 4y+3z & =8 \\ mz & =4 \end{array}\right.$
   - **1er cas** : $m=0$

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x-3y & =5 \\ 4y+3z & =8 \\ 0 & =4 \end{array}\right.$$

$$\mathcal{S}=\emptyset$$

   - **2ème cas** : $m\neq 0$

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} (1+m^2)x & =5+3y \\ 4y & =8-3z \\ z & =\dfrac{4}{m} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x & =\dfrac{11m-9}{m(1+m^2)} \\ y & =\dfrac{2m-3}{m} \\ z & =\dfrac{4}{m} \end{array}\right.$$

$$\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{11m-9}{m(1+m^2)},\frac{2m-3}{m},\frac{4}{m}\right)\right\}$$

2. $\left\{\begin{array}{rl} mx+y+z & =m^2 \\ x+my-mz & =m \\ x-y+mz & =1 \end{array}\right.$

$$\begin{aligned}(S) &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rll} x-y+mz & =1 & \\ x+my-mz & =m & L_1\leftrightarrow L_3 \\ mx+y+z & =m^2 & \end{array}\right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rll} x-y+mz & =1 & \\ (m+1)y-2mz & =m-1 & L_2\leftrightarrow L_2-L_1 \\ (1+m)y+(1-m^2)z & =m^2-m & L_3\leftarrow L_3-mL_1 \end{array}\right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rll} x-y+mz & =1 & \\ (m+1)y-2mz & =m-1 & \\ (1-m^2+2m)z & =m^2-2m+1 & L_3\leftarrow L_3-L_2 \end{array}\right.\end{aligned}$$

$1-m^2+2m=0 \Longleftrightarrow m^2-2m-1=0 \Longleftrightarrow (m=1+\sqrt{2})$ ou $(m=1-\sqrt{2})$.

1er cas : $m=1+\sqrt{2}$.

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x-y+mz & =1 \\ (m+1)y-2mz & =m-1 \\ 0 & =2 \end{array}\right.$$

$$\mathcal{S}=\emptyset$$

2ème cas : $m = 1 - \sqrt{2}$.

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rl} x - y + mz & = 1 \\ (m+1)y - 2mz & = m - 1 \\ 0 & = 2 \end{array} \right.$$

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

3ème cas : $1 - m^2 + 2m \neq 0$.

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rl} x - y + mz & = 1 \\ (m+1)y - 2mz & = m - 1 \\ z & = \dfrac{m^2 - 2m + 1}{-m^2 + 2m + 1} = \dfrac{(m-1)^2}{-m^2 + 2m + 1} \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rl} x - y + mz & = 1 \\ (m+1)y & = m - 1 + \dfrac{2m(m-1)^2}{-m^2 + 2m + 1} \\ z & = \dfrac{(m-1)^2}{-m^2 + 2m + 1} \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rl} x - y + mz & = 1 \\ (m+1)y & = \dfrac{(m-1)(m^2+1)}{-m^2 + 2m + 1} \\ z & = \dfrac{(m-1)^2}{-m^2 + 2m + 1} \end{array} \right.$$

Cas A : $m = -1$.
Alors :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rl} x - y + mz & = 1 \\ 0 & = 2 \\ z & = \dfrac{(m-1)^2}{-m^2 + 2m + 1} \end{array} \right.$$

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

Cas B : $m \neq -1$.
Alors :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rl} x & = 1 + y - mz \\ y & = \dfrac{(m-1)(m^2+1)}{(-m^2 + 2m + 1)(m+1)} \\ z & = \dfrac{(m-1)^2}{-m^2 + 2m + 1} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} x & = \dfrac{m(-m^3 + m^2 + m + 3)}{(m+1)(-m^2 + 2m + 1)} \\ y & = \dfrac{(m-1)(m^2+1)}{(-m^2 + 2m + 1)(m+1)} \\ z & = \dfrac{(m-1)^2}{-m^2 + 2m + 1} \end{array} \right.$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{m(-m^3 + m^2 + m + 3)}{(m+1)(-m^2 + 2m + 1)}, \frac{(m-1)(m^2+1)}{(-m^2 + 2m + 1)(m+1)}, \frac{(m-1)^2}{-m^2 + 2m + 1} \right) \right\}$$

3.

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= 2 \\ 2x+6y-4z &= 2 \\ -3x-9y+6z &= m-5 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= 2 \\ 4y-6z &= -2 \\ -6y+9z &= m+1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= 2 \\ 2y-3z &= -1 \\ -6y+9z &= m+1 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= 2 \\ 2y-3z &= -1 \\ 0 &= m-2 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$$

1er cas : si $m \neq 2$

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

2ème cas : si $m = 2$, alors on a

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= 2 \\ 2y-3z &= -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{5}{2} - \frac{5}{2}z \\ y &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}z \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}z, -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}z, z \right) z \in \mathbb{R} \right\}$$

$\boxed{4}$ Déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}, \quad \frac{2x+1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

Il suffit simplement de choisir a, b et c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\},\ 2x+1 = a(x+1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x+1)$$

autrement dit tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\},\ 2x+1 = (a+b+c)x^2 + (3a+2b+c)x + 2a$$

Il suffit en fait de prendre a, b, c tels que :

$$\left\{\begin{array}{c} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=2 \\ 2a=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a=1/2 \\ b=1 \\ c=-3/2 \end{array}\right.$$

5 Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^3$, en fonction des paramètres λ et μ :

$$\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ x-y+z &= 4 \\ 2x+y+3z &= \lambda \\ -x+2y+z &= \mu \end{cases}$$

Soient λ, μ deux réels quelconques. Alors

$$(S) \iff \begin{cases} x+y+z &= 2 \\ x-y+z &= 4 \\ 2x+y+3z &= \lambda \\ -x+2y+z &= \mu \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z &= 2 & \\ -2y &= 2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y+z &= \lambda - 4 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ 3y+2z &= \mu + 2 & L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= 3-z \\ y &= -1 \\ z &= \lambda - 5 \\ 2z &= \mu + 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 8-\lambda & \\ y &= -1 & \\ z &= \lambda - 5 & \\ 0 &= \mu - 2\lambda + 15 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \end{cases}$$

1er cas : $\mu - 2\lambda + 15 \neq 0$. Alors, le système n'admet pas de solution.

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

2ème cas : $\mu - 2\lambda + 15 = 0$. Alors, le système admet une unique solution :

$$\mathcal{S} = \{(8-\lambda, -1, \lambda - 5)\}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y, x-3y) \end{array}$ est surjective.

Nous devons montrer que pour tout élément $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ (espace d'arrivée), il existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(2x+y, x-3y) = (a,b)$.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ quelconque. Il nous faut montrer que le système suivant, d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ admet au moins une solution :

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x+y & = a \\ x-3y & = b \end{array}\right.$$

Par la méthode du Pivot de Gauss, on a donc :

$$\begin{aligned}
(S) &\iff \left\{\begin{array}{ll} 2x+y & = a \\ x-3y & = b \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{lll} 2x+y & = a & \\ \quad -7y & = 2b-a & \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ll} x = \dfrac{3a+b}{7} & = a \\ y = \dfrac{a-2b}{7} & \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi, le système admet comme ensemble de solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{3a+b}{7}, \frac{a-2b}{7}, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$$

Donc en particulier, le système admet bien au moins une solution.
Ainsi, tout élément $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ admet au moins un antécédent par l'application f dans $\mathbb{R}^2$. Ainsi, f est surjective.

7 Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$ et $g(\mathbb{R}^3)$ où :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, -x+2y, 5x-y) \end{array}, \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y+z, x-2y) \end{array}$$

1.

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}^2) &= \big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ f(x,y) = (a,b,c)\big\} \\ &= \big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x-y, -x+2y, 5x-y) = (a,b,c)\big\} \end{aligned}$$

Ainsi, $f(\mathbb{R}^2)$ est l'ensemble des triplets $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que le système suivant admette au moins une solution :

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y &= a \\ -x + 2y &= b \\ 5x - y &= c \end{cases}$$

Par la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{aligned} (S) &\Longleftrightarrow \begin{cases} x - y &= a \\ \quad y &= a + b \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ \quad 4y &= c - 5a \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x &= 2a + b \\ y &= a + b \\ 0 &= c - 9a - 4b \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que le système admet une solution si et seulement si $9a + 4b - c = 0$.
Il s'agit d'une équation à trois inconnues, qui admet une infinité de solutions :

$$\mathcal{S} = \{(a, b, 9a + 4b), \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

Récapitulons :

$$\begin{aligned} (a,b,c) \in f(\mathbb{R}^2) &\Longleftrightarrow \text{Le système } (S) \text{ admet au moins une solution} \\ &\Longleftrightarrow 9a + 4b - c = 0 \\ &\Longleftrightarrow (a,b,c) \in \{(a, b, 9a + 4b), \ a, b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Donc

$$f(\mathbb{R}^2) = \{(a, b, 9a + 4b), \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

2.

$$\begin{aligned} g(\mathbb{R}^3) &= \big\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) = (a,b)\big\} \\ &= \big\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (2x+y+z, x-2y) = (a,b)\big\} \end{aligned}$$

Ainsi, $g(\mathbb{R}^3)$ est l'ensemble des couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que le système suivant admette au moins une solution :

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z &= a \\ x - 2y &= b \end{cases}$$

Si on ordonne les variables de cette façon (z, y, x), on a un système échelonné, on détermine facilement ses solutions :

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} z + y + 2x &= a \\ x - 2y &= b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z &= a - 2b - 5y \\ x &= b + 2y \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (S) est $\{(b + 2y, y, a - 2b - 5y), y \in \mathbb{R}\}$. Ainsi, il y a toujours des solutions (même une infinité), ceci quels que soient a et b. Donc g est surjective,

$$g(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$$

8 Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $(-6,-17,17)$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $((2,1,3),(3,5,-2))$?

On cherche s'il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $\begin{pmatrix}-6\\-17\\17\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}-6\\-17\\17\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix}-6\\-17\\17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+3b\\a+5b\\3a-2b\end{pmatrix}\\
&\iff \left\{\begin{array}{rl} a+5b & =-17\\ 2a+3b & =-6\\ 3a-2b & =17\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rll} a+5b & =-17 & \\ -7b & =28 & L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ -17b & =4\times 17 & L_3\leftarrow L_3-3L_1\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} a=3\\ b=-4\end{array}\right.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix}-6\\-17\\17\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}$$

On a donc : $(-6,-17,17)\in Vect\Big((2,1,3),(3,5,-2)\Big)$

$\boxed{9}$ Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels ou non :

1. $E_1 = \{(x+y, x-y, 2y) \in \mathbb{R}^3,\ x, y \in \mathbb{R}\}$
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y - 3z = 0\}$
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ e^x e^y = 0\}$
5. $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z(x^2 + y^2) = 0\}$
6. $E_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 = 0\}$.

1. **1ère méthode**.

   - $E_1 \subset \mathbb{R}^3$
   - Le vecteur nul $\overrightarrow{0} = (0,0,0)$ appartient à E_1 (il suffit de choisir $x = y = 0$), donc en particulier $E_1 \neq \emptyset$.
   - Soit $\overrightarrow{u} = (x+y, x-y, 2y) \in E_1$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$)
     Soit $\overrightarrow{v} = (x'+y', x'-y', 2y') \in F$ (avec $x', y' \in \mathbb{R}$)
     Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. A-t-on encore $\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in E_1$? On a :

     $$\begin{aligned} \lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} &= \lambda(x+y, x-y, 2y) + (x'+y', x'-y', 2y') \\ &= \big(\lambda(x+y) + (x'+y'), \lambda(x-y) + (x'-y'), \lambda 2y + 2y'\big) \\ &= \big((\lambda x + x') + (\lambda y + y'), (\lambda x + x') - (\lambda y + y'), 2(\lambda y + y')\big) \in E_1 \end{aligned}$$

     L'ensemble E_1 est donc stable par combinaison linéaire.

   On a donc montré que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, donc c'est un espace vectoriel.

   2ème méthode :

   $$E_1 = \{(x+y, x-y, 2y),\ x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1,0) + y(1,-1,2),\ x, y \in \mathbb{R}\} = Vect\big((1,1,0), (1,-1,2)\big)$$

   donc E_1 apparaît directement comme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, (celui engendré par $(1,1,0)$ et $(1,-1,2)$), donc c'est un espace vectoriel.

2. **1ère méthode**.

   - $E_2 \subset \mathbb{R}^3$
   - Le vecteur nul $\overrightarrow{0} = (0,0,0)$ appartient à E_2 puisque $0 + 2.0 - 3.0 = 0$, donc en particulier $E_2 \neq \emptyset$.
   - Soit $\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in E_2$: on a $x + 2y - 3z = 0$
     Soit $\overrightarrow{v} = (x', y', z') \in E_2$: on a $x' + 2y' - 3z' = 0$
     Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. A-t-on encore $\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in E_2$? On a : $\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \lambda(x, y, z) + (x', y', z') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$.
     De plus :

     $$(\lambda x + x') + 2(\lambda y + y') - 3(\lambda z + z') = \lambda(x + 2y - 3z) + (x' + 2y' - 3z') = 0 + 0 = 0$$

     donc E_2 est stable par combinaison linéaire.

   On a donc montré que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, donc c'est un espace vectoriel.

   2ème méthode :

   $$\begin{aligned} E_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y - 3z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = -2y + 3z\} \\ &= \{(-2y + 3z, y, z),\ y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-2,1,0) + z(3,0,1),\ y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= Vect\big((-2,1,0), (3,0,1)\big) \end{aligned}$$

donc E_2 apparaît directement comme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, (celui engendré par $(-2,1,0)$ et $(3,0,1)$) donc c'est un espace vectoriel.

3. **1ère méthode**.

   - $E_3 \subset \mathbb{R}^3$
   - Le vecteur nul $\overrightarrow{0} = (0,0,0)$ appartient à E_3 puisque $0+0+0=0$ et $2.0-0+0=0$, donc en particulier $E_3 \neq \emptyset$.
   - Soit $\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in E_3$: on a $x+y+z=0$ et $2x-y+z=0$
     Soit $\overrightarrow{v} = (x',y',z') \in E_3$: on a $x'+y'+z'=0$ et $2x'-y'+z'=0$
     Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. A-t-on encore $\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in E_3$? On a : $\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \lambda(x,y,z)+(x',y',z') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$.
     De plus :
     $$(\lambda x + x') + (\lambda y + y') + (\lambda z + z') = \lambda(x+y+z) + (x'+y'+z') = 0+0=0$$
     et
     $$2(\lambda x + x') - (\lambda y + y') + (\lambda z + z') = \lambda(2x-y+z) + (2x'-y'+z') = 0+0=0$$
     donc E_3 est stable par combinaison linéaire.

   On a donc montré que E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, donc c'est un espace vectoriel.

   2ème méthode :

   $$\begin{aligned} E_3 &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z=0 \text{ et } 2x-y+z=0\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ \left\{\begin{array}{l} x+y=-z \\ 2x-y=-z \end{array}\right.\right\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ \left\{\begin{array}{l} x+y=-z \\ 3x=-2z \end{array}\right.\right\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ \left\{\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{3}z \\ x=\dfrac{-2}{3}z \end{array}\right.\right\} \\ &= \left\{\left(-\frac{2}{3}z, -\frac{1}{3}z, z\right), \ z\in\mathbb{R}\right\} = \left\{\frac{1}{3}z\,(-2,-1,3)\right\} = Vect\big((-2,-1,3)\big) \end{aligned}$$

   donc E_3 apparaît directement comme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, donc c'est un espace vectoriel.

4. E_4 n'est pas un espace vectoriel puisqu'il est vide (et il ne contient donc pas le vecteur nul $(0,0,0)$).
5. E_5 n'est pas un espace vectoriel car il n'est pas stable par combinaison linéaire.
   Par exemple, $(0,0,1) \in E_5$, $(1,1,0) \in E_5$, mais leur somme $(1,1,1)$ n'appartient pas à E_5.
6. $E_6 = \{(0,0)\}$, c'est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

10 Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1,6,9),(1,4,6),(3,6,2))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Il s'agit de montrer ici que :

$$\mathbb{R}^3 = Vect((1,6,9),(1,4,6),(3,6,2))$$

i.e. que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme une combinaison linéaire de $(1,6,9)$, de $(1,4,6)$ et $(3,6,2)$.

Prenons $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On cherche trois réels x, y, z tels que :

$$\begin{aligned}
& (a,b,c) = x(1,6,9) + y(1,4,6) + z(3,6,2) \\
\iff & (a,b,c) = (x+y+3z, 6x+4y+6z, 9x+6y+2z) \\
\iff & \begin{cases} x+y+3z = a \\ 6x+4y+6z = b \\ 9x+6y+2z = c \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x+y+3z = a \\ -2y-12z = b-6a & L_2 \leftrightarrow L_2 - 6L_1 \\ -3y-25z = c-9a & L_3 \leftrightarrow L_3 - 9L_1 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x+y+3z = a \\ -2y-12z = b-6a & L_2 \leftrightarrow L_2 - 6L_1 \\ -14z = 2(c-9a) - 3(b-6a) & L_3 \leftrightarrow 2L_3 - 3L_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

On a un système de Cramer, qui admet donc au moins une solution (en réalité, une seule !). Le système étant compatible, la famille $\mathcal{B}$ est bien génératrice de $\mathbb{R}^3$.

11 Pour les espaces vectoriels suivants, déterminer une famille génératrice :

1. $A = \{(x-y, x+y, 2x-3y),\ x, y \in \mathbb{R}\}$
2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y = z\}$
3. $C = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x - y + 2z - t = 0 \text{ et } y + z - t = 0\}$
4. $D = \{(a+2b, a-b, 3b, 2a)\ ,\ a, b \in \mathbb{R}\}$
5. $E = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ -x + 2y = y + 6z \text{ et } y + 3z = -2x\big\}$

1. $A = Vect\big((1,1,2), (-1,1,-3)\big)$
2. $B = Vect\big((1,1,1)\big)$
3. $$\left\{\begin{array}{l} 2x - y + 2z - t = 0 \\ y + z - t = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{3}{2}z + t \\ y = -z + t \end{array}\right.$$
   Ainsi :
   $$C = \left\{\left(-\frac{3}{2}z + t, -z + t, z, t\right), z, t \in \mathbb{R}\right\} = Vect\left(\left(\frac{-3}{2}, -1, 1, 0\right), (1,1,0,1)\right)$$
4. $D = Vect\big((1,1,0,2),\ (2,-1,3,0)\big)$.
5. $$\left\{\begin{array}{l} -x + 2y = y + 6z \\ y + 3z = -2x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x - y + 6z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x - y + 6z = 0 \\ 3y - 9z = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = -3z \\ y = 3z \end{array}\right.$$
   Ainsi :
   $$E = \{(-3z, 3z, z),\ z \in \mathbb{R}\} = Vect\big((-3,3,1)\big)$$

12 Pour chacun des espaces vectoriels suivants, trouver deux familles génératrices différentes :

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - 2y + z = 0\}$
2. $F = \{(-2y + z, y - z, y) \in \mathbb{R}^3, \ (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$

1. On peut écrire :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = 2y - z\} = \{(2y - z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\} = Vect\big((2, 1, 0), (-1, 0, 1)\big)$$

   mais aussi :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = -x + 2y\} = \{(x, y, -x + 2y), x, y \in \mathbb{R}\} = Vect\big((1, 0, -1), (0, 1, 2)\big)$$

2. On a :

$$F = Vect((-2, 1, 1), \ (1, -1, 0))$$

   mais on peut par exemple changer $(1, -1, 0)$ pour $(1, -1, 0) + (-2, 1, 1) = (-1, 0, 1)$ dans la famille génératrice, on a donc :

$$F = Vect((-2, 1, 1), \ (-1, 0, 1))$$

13 Vérifier que chacun des espaces vectoriels suivants est un plan de $\mathbb{R}^3$ et en donner une équation cartésienne.

1. $A = \text{Vect}((1,0,0),(0,2,0))$
2. $B = \text{Vect}((1,0,1),(2,3,0))$
3. $C = \text{Vect}((1,1,2),(0,1,-1))$
4. $D = \text{Vect}((1,-1,1),(2,1,1),(0,-3,1))$

1. A est engendré par deux vecteurs non colinéaires, donc on a bien $\dim(A) = 2$: A est un plan. De plus,

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in A &\iff \exists a,b \in \mathbb{R} \ / \ (x,y,z) = a(1,0,0) + b(0,2,0), \\ &\iff \exists a,b \in \mathbb{R} \ / \left\{\begin{array}{l} a = x \\ 2b = y \\ 0 = z \end{array}\right. \\ &\iff z = 0\end{aligned}$$

Ainsi :

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = 0\}$$

2. B est engendré par deux vecteurs non colinéaires, donc on a bien $\dim(B) = 2$: B est un plan. De plus,

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in B &\iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \ / \ (x,y,z) = \lambda(1,0,1) + \mu(2,3,0) \\ &\iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \ / \ \left\{\begin{array}{l} \lambda + 2\mu = x \\ 3\mu = y \\ \lambda = z \end{array}\right. \\ &\iff z + 2\frac{y}{3} = x \\ &\iff 3x - 2y - 3z = 0\end{aligned}$$

Ainsi :

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 3x - 2y - 3z = 0\}$$

3. C est engendré par deux vecteurs non colinéaires, donc on a bien $\dim(C) = 2$: C est un plan. De plus,

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in C &\iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \ / \ (x,y,z) = \alpha(1,1,2) + \beta(0,1,-1) \\ &\iff \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R} \ / \ \left\{\begin{array}{l} \alpha = x \\ \alpha + \beta = y \\ 2\alpha - \beta = z \end{array}\right. \\ &\iff \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R} \ / \ \left\{\begin{array}{l} \alpha = x \\ \beta = y - x \\ 2x - (y - x) = z \end{array}\right. \\ &\iff 3x - y - z = 0\end{aligned}$$

Ainsi :

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 3x - y - z = 0\}$$

4. D est engendré a priori par trois vecteurs, mais $(0,-3,1) = 2(1,-1,1) - (2,1,1)$, donc en réalité :

$$D = \mathrm{Vect}((1,-1,1),(2,1,1))$$

Ainsi, D est engendré par deux vecteurs non colinéaires, donc on a bien $\dim(D) = 2$: D est un plan. De plus,

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in D &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \;/\; (x,y,z) = \alpha(1,-1,1) + \beta(2,1,1) \\
&\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \;/\; \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta = x \\ -\alpha + \beta = y \\ \alpha + \beta = z \end{array} \right. \\
&\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \;/\; \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta = x \\ 3\beta = y + x \\ -\beta = z - x \end{array} \right. \\
&\iff -3(z-x) = y + x \iff 2x - y - 3z = 0
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; 2x - y - 3z = 0\}$$

14 Écrire chacun des sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ suivants sous les trois formes d'écriture : soit par un système d'équations cartésiennes (comme A), soit par un paramétrage (comme B), soit par une famille génératrice (comme C) :

1. $A = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y-z-t=0 \text{ et } \ y+z-t=0\}$
2. $B = \{(a-b+3c, c, a+b, 0), \ a,b,c \in \mathbb{R}\}$
3. $C = \text{Vect}((1,2,-1,0),(0,1,3,-1))$

1.

$$\begin{aligned} A &= \boxed{\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y-z-t=0 \text{ et } \ y+z-t=0\}} \\ &= \left\{(x,y,z,t) \ / \ \left\{\begin{array}{l} x=2z \\ t=y+z \end{array}\right.\right\} \\ &= \boxed{\{(2z,y,z,y+z), \ y,z \in \mathbb{R}\}} \\ &= \boxed{Vect\big((0,1,0,1), \ (2,0,1,1)\big)} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} B &= \boxed{\{(a-b+3c, c, a+b, 0), \ a,b,c \in \mathbb{R}\}} \\ &= \boxed{Vect\big((1,0,1,0), \ (-1,0,1,0), \ (3,1,0,0)\big)} \end{aligned}$$

et

$$(x,y,z,t) \in B \Longleftrightarrow \exists a,b,c \in \mathbb{R} \ / \ \left\{\begin{array}{l} a-b+3c=x \\ c=y \\ a+b=z \\ 0=t \end{array}\right. \Longleftrightarrow t=0$$

donc :

$$B = \boxed{\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ t=0\}}$$

3.

$$\begin{aligned} C &= \boxed{\text{Vect}((1,2,-1,0),(0,1,3,-1))} \\ &= \boxed{\{(a, 2a+b, -a+3b, -b), \ a,b \in \mathbb{R}\}} \end{aligned}$$

et

$$(x,y,z,t) \in C \Longleftrightarrow \exists a,b \in \mathbb{R} \ / \ \left\{\begin{array}{l} a=x \\ 2a+b=y \\ -a+3b=z \\ -b=t \end{array}\right. \Longleftrightarrow \exists a,b \in \mathbb{R} \ / \ \left\{\begin{array}{l} a=x \\ b=y-2x \\ -x+3(y-2x)=z \\ -(y-2x)=t \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 7x-3y+z=0 \\ 2x-y-t=0 \end{array}\right.$$

Ainsi :

$$C = \boxed{\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 7x-3y+z=0 \text{ et } \ 2x-y-t=0\}}$$

$\boxed{15}$ Dans $\mathbb{R}^3$, on note $u_1 = (1, -1, 1)$ et $u_2 = (1, 1, 0)$, $v_1 = (1, 3, -1)$ et $v_2 = (1, -5, 3)$.
Montrer que $\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

A priori, puisqu'on veut démontrer que deux ensembles sont égaux, la méthode de base est la suivante : on fait une double inclusion :

- Montrons que $Vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \subset Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$.

  On a $\overrightarrow{u_1} = (1, -1, 1) = \dfrac{1}{2}(1, 3, -1) + \dfrac{1}{2}(1, -5, 3)$, donc :
  $$\overrightarrow{u_1} \in Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$$
  On a $\overrightarrow{u_2} = (1, 1, 0) = \dfrac{3}{4}(1, 3, -1) + \dfrac{1}{4}(1, -5, 3)$, donc :
  $$\overrightarrow{u_2} \in Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$$
  Or, $Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est un sous-espace vectoriel, donc toute combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}$ et de $\overrightarrow{u_2}$ doit encore être dans $Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$.
  Ainsi :
  $$Vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \subset Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$$

- Montrons que $Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) \subset Vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$.

  On a $\overrightarrow{v_1} = (1, 3, -1) = -(1, -1, 1) + 2(1, 1, 0)$, donc :
  $$\overrightarrow{v_1} \in Vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$$
  On a $\overrightarrow{v_2} = (1, -5, 3) = 3(1, -1, 1) - 2(1, 1, 0)$, donc :
  $$\overrightarrow{v_2} \in Vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$$
  Or, $Vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est un sous-espace vectoriel, donc toute combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}$ et de $\overrightarrow{v_2}$ doit encore être dans $Vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$.
  Ainsi :
  $$Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) \subset Vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$$

Finalement, on a donc $Vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) = Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$.

2ème méthode :

$$(x, y, z) \in Vect(u_1, u_2) \Longleftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} \ / \ \begin{cases} a + b = x \\ -a + b = y \\ a = z \end{cases} \Longleftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} \ / \ \begin{cases} a = z \\ b = x - z \\ -(z) + (x - z) = y \end{cases} \Longleftrightarrow x - y - 2z = 0$$

et

$$(x, y, z) \in Vect(v_1, v_2) \Longleftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} \ / \ \begin{cases} a + b = x \\ 3a - 5b = y \\ -a + 3b = z \end{cases} \Longleftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} \ / \ \begin{cases} 4b = x + z \\ 4a = 3x - z \\ 3(3x - z) - 5(x + z) = 4y \end{cases} \Longleftrightarrow x - y - 2z = 0$$

Donc :
$$Vect(u_1, u_2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y - 2z = 0\} = Vect(v_1, v_2)$$

3ème méthode : (encore plus rapide) : cf exercice 23 en utilisant les dimensions.

16 Dans $\mathbb{R}^3$, on note $u_1 = (-1, 1, -1)$ et $u_2 = (1, 2, 4)$, $v_1 = (3, -1, a)$ et $v_2 = (2, 3, b)$.
Déterminer a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

$$(x, y, z) \in Vect(u_1, u_2) \iff \begin{cases} x = -a + b \\ y = a + 2b \\ z = -a + 4b \end{cases} \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R} \iff 2x + y - z = 0$$

Ainsi :

$$Vect(u_1, u_2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \ / \ 2x + y - z = 0\}$$

Pour que $v_1 \in Vect(u_1, u_2)$, on doit imposer que $2(3) + (-1) - (a) = 0 \iff a = 5$
Pour que $v_2 \in Vect(u_1, u_2)$, on doit imposer que $2(2) + (3) - (b) = 0 \iff b = 7$.
Donc, si a et b vérifient $Vect(u_1, u_2) = Vect(v_1, v_2)$, on n'a qu'une seule possibilité : $a = 5$ et $b = 7$.

Réciproquement, si on pose $a = 5$ et $b = 7$, alors on vérifie qu'on a bien également :

$$Vect(v_1, v_2) = Vect\left((3, -1, 5), (2, 3, 7)\right) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \ / \ 2x + y - z = 0\} = Vect(u_1, u_2)$$

17 Dans $\mathbb{R}^3$, on note $u = (1, 3, 1)$, $v = (2, 1, 2)$ et $w = (m, m + 1, 3m + 2)$, où $m \in \mathbb{R}$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m pour que $w \in \text{Vect}(u, v)$.

$$\begin{aligned}
w \in Vect(u,v) &\iff \exists a, b \in \mathbb{R} \ / \ w = au + bv \\
&\iff \exists a, b \in \mathbb{R} \ / \ \begin{pmatrix} m \\ m+1 \\ 3m+2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&\iff \exists a, b \in \mathbb{R} \ / \ \begin{cases} m = a + 2b \\ m + 1 = 3a + b \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ 3m + 2 = a + 2b \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\
&\iff \exists a, b \in \mathbb{R} \ / \ \begin{cases} a + 2b = m \\ -5b = -2m + 1 \\ 0 = 2m + 2 \end{cases} \\
&\iff 2m + 2 = 0 \\
&\iff m = -1
\end{aligned}$$

18 Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. $((1,2),(3,3))$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. $((1,2,0),(0,2,3))$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $((1,-1,0),(0,2,1),(-2,0,1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
4. $((2,-1,1),(1,-1,3),(-3,1,1),(1,2,3))$ dans $\mathbb{R}^3$.
5. $((1,1,1,1),(1,2,3,4),(1,2,8,16))$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires, donc la famille $((1,2),(3,3))$ est libre.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires, donc la famille $((1,2,0),(0,2,3))$ est libre.
3. Pour a,b,c trois réels, on a :
$$a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a-2c=0 \\ -a+2b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2c \\ a=2b \\ a=0 \end{cases} \iff a=b=c=0$$
Donc la famille $((1,-1,0),(0,2,1),(-2,0,1))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.
4. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, donc toute famille d'au moins 4 vecteurs est nécessairement liée.
La famille $((2,-1,1),(1,-1,3),(-3,1,1),(1,2,3))$ est donc liée dans $\mathbb{R}^3$.
On peut par exemple trouver que :
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
5. Pour a,b,c réels, on a :
$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ a+2b+2c=0 \\ a+3b+8c=0 \\ a+4b+16c=0 \end{cases} \iff a=b=c=0$$
donc la famille $((1,1,1,1),(1,2,3,4),(1,2,8,16))$ est libre dans $\mathbb{R}^4$.

19 Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :

1. $A = \{(x-y+z, 3x+6z, -2x+4y),\ x, y, z \in \mathbb{R}^3\}$
2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x = y \text{ et } y = 3z\}$
3. $C = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y+z+t = 0\}$
4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x+y-z = 0\}$
5. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x-z = 0 \text{ et } 3y-z = 0\}$
6. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ -x+2y = y+6z = 3z-2x\}$

1. $A = \left\{ \begin{pmatrix} x-y+z \\ 3x+6z \\ -2x+4y \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.
   Or, $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, donc : $A = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$.
   La famille $\Big((1, 3, -2), (-1, 0, 4)\Big)$ est libre (deux vecteurs non colinéaires), c'est donc une base de A, et donc $\boxed{\dim(A) = 2}$.
2. $B = \left\{ \begin{pmatrix} y/2 \\ y \\ y/3 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right) = Vect\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.
   La famille $\Big((3, 6, 2)\Big)$ est libre (le vecteur est non nul), c'est donc une base de B, et donc $\boxed{\dim(B) = 1}$.
3. $C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -x-y-z \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.
   La famille génératrice proposée est clairement libre (aucun vecteur n'est combinaison linéaire des autres), c'est donc une base de C, et donc $\boxed{\dim(C) = 3}$.
4. $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x+y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
   La famille $\Big((1, 0, 2), (0, 1, 1)\Big)$ est libre (deux vecteurs non colinéaires), c'est donc une base de D, et donc $\boxed{\dim(D) = 2}$.
5. $E = \left\{ \begin{pmatrix} 3y \\ y \\ 3y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.
   La famille $\Big((3, 1, 3)\Big)$ est libre (le vecteur est non nul), c'est donc une base de E, et donc $\boxed{\dim(E) = 1}$.
6. $F = \left\{ \begin{pmatrix} -3z \\ 3z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, donc $((-3, 3, 1))$ base de F et $\boxed{\dim(F) = 1}$.

20 Déterminer si la famille donnée est une famille libre / famille génératrice / base de l'espace donné :

1. $((1,0,-2,5),(7,-4,3,1),(0,1,-1,0),(1,-3,0,2))$ dans $\mathbb{R}^4$
2. $((1,2,3),(4,5,6))$ dans $\mathbb{R}^3$
3. $((0,0,1,0),(0,1,1,2),(2,0,0,-2))$ dans $\mathbb{R}^4$.
4. $((1,2,3),(2,3,1),(3,1,2))$ dans $\mathbb{R}^3$.
5. $((1,2,3),(-1,2,5),(-1,10,21))$ dans $\mathbb{R}^3$.
6. $((1,2),(2,1),(-1,4))$ dans $\mathbb{R}^2$

1. On sait que $\dim(\mathbb{R}^4)=4$.
   La famille comportant exactement 4 éléments, elle peut être libre / génératrice / base, l'un impliquant tous les autres.
   Soient $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que :
   $$a(1,0,-2,5)+b(7,-4,3,1)+c(0,1,-1,0)+d(1,-3,0,2)=(0,0,0,0)$$
   Alors :
   $$\begin{cases} a+7b+d=0 \\ -4b+c-3d=0 \\ -2a+3b-c=0 \\ 5a+b+2d=0 \end{cases} \Longrightarrow \ldots\ldots \Longrightarrow a=b=c=d=0$$
   Donc la famille est <u>libre</u>, et de cardinal 4 dans $\mathbb{R}^4$, donc c'est une <u>base</u> de $\mathbb{R}^4$ (elle est donc aussi <u>génératrice</u>).
2. $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3. La famille $((1,2,3),(4,5,6))$ est clairement <u>libre</u> (deux vecteurs non colinéaires), mais n'est <u>pas génératrice</u> (il n'y a pas assez de vecteurs, il faudrait au moins 3 vecteurs puisqu'on est en dimension 3).
3. $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4. La famille proposée n'est <u>pas génératrice</u>, car pas assez de vecteurs.
   Elle est <u>libre</u> car :
   - $((0,0,1,0),(0,1,1,2))$ est libre (deux vecteurs non colinéaires).
   - $(2,0,0,-2)$ n'est pas combinaison linéaire de $(0,0,1,0)$ et $(0,1,1,2)$ (cf première coordonnée).
4. $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 et la famille proposée comporte trois vecteurs. Tout est possible.
   $$a(1,2,3)+b(2,3,1)+c(3,1,2)=(0,0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} a+2b+3c=0 \\ 2a+3b+c=0 \\ 3a+b+2c=0 \end{cases} \Longleftrightarrow a=b=c=0$$
   donc la famille est <u>libre</u>, de cardinal 3 dans $\mathbb{R}^3$, c'est donc une <u>base</u> de $\mathbb{R}^3$ (et elle est donc <u>génératrice</u> aussi)
5. $(-1,10,21)=2(1,2,3)+3(-1,2,5)$, donc la famille est <u>liée</u> dans $\mathbb{R}^3$.
   Ainsi, $Vect((1,2,3),(-1,2,5),(-1,10,21))=Vect((1,2,3),(-1,2,5)) \neq \mathbb{R}^3$, donc la famille n'est <u>pas génératrice</u> de $\mathbb{R}^3$.
6. $\dim(\mathbb{R}^2)=2$, donc la famille comportant 3 vecteurs, elle est nécessairement <u>liée</u>.
   Les deux premiers vecteurs $((1,2),(2,1))$ forment une famille libre (car non colinéaires), de cardinal 2, donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$, donc la famille $((1,2),(2,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$, donc la famille $((1,2),(2,1),(-1,4))$ est, elle aussi, <u>génératrice</u> de $\mathbb{R}^2$.

21

1. Pour chacune des familles suivantes, montrer qu'elle est libre, et la compléter une base de E.
   (a) Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = ((1,1,0),(1,0,1))$
   (b) Dans $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{F} = ((1,1,-1,-1),(0,1,0,1),(1,1,0,0))$
2. Pour chacune des familles suivantes, montrer qu'elle est génératrice, et en extraire une base de E.
   (a) Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = ((2,3),(1,-1),(1,2))$
   (b) Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = ((1,1,1),(1,1,-1),(1,-1,2),(1,3,-4))$

1. (a) $\mathcal{F} = ((1,1,0),(1,0,1))$ est libre, puisque les deux vecteurs sont non colinéaires.
Pour compléter la famille libre en une base, il suffit de prendre un vecteur qui ne soit pas combinaison linéaire de $(1,1,0)$ et $(1,0,1)$.
Par exemple $(0,0,1)$ convient :

$$(0,0,1) = a(1,1,0) + b(1,0,1) \Longleftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=0 \\ b=1 \end{cases} \quad : \text{ impossible}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{B} = \Big((1,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\Big)$ est libre, de cardinal 3, dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\mathcal{F} = ((1,1,-1,-1),(0,1,0,1),(1,1,0,0))$ est libre car les deux derniers ne sont pas colinéaires, et le premier n'est pas combinaison linéaire des deux derniers (cf 3ème coordonnée).
Pour compléter la famille libre en une base, il suffit de prendre un vecteur qui ne soit pas combinaison linéaire des trois vecteurs.
Par exemple $(1,0,0,0)$ convient :

$$(1,0,0,0) = a(1,1,-1,-1) + b(0,1,0,1) + c(1,1,0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} a+c=1 \\ a+b+c=0 \\ -a=0 \\ -a+b=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=1 \\ 1=0 \end{cases} \quad : \text{ impossible}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{B} = \Big((1,1,-1,-1),(0,1,0,1),(1,1,0,0),(1,0,0,0)\Big)$ est libre et de cardinal 4, c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. (a) Pour tout vecteur (a,b) de $\mathbb{R}^2$, on peut trouver $x,y,z \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 2x+y+z \\ b = 3x-y+2z \end{cases}$$

(le système contient deux équations (non incompatibles) avec trois inconnues, donc il y a toujours une infinité de solutions).
La famille est donc bien génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Par exemple, $((2,3),(1,-1))$ est une famille extraite de $\mathcal{F}$, qui est libre (non-colinéaires) et de cardinal 2, donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

(b) Pour tout vecteur (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on peut trouver $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a = x + y + z + t \\ b = x + y - z + 3t \\ c = x - y + 2z - 4t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \quad +y \quad +z \quad +t \quad = a \\ \quad -2y \quad +z \quad -5t \quad = c - a \\ \quad\quad -2z \quad +2t \quad = b - a \end{cases}$$

Le système est triangulaire, avec plus d'inconnues que d'équations, donc admet toujours une infinité de solutions. La famille est donc bien génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Prenons par exemple $\mathcal{B} = (u, v, w)$ avec $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 1, -1)$, $w = (1, -1, 2)$, famille extraite de $\mathcal{F}$.

(u, v) est libre (car non colinéaires), et $w \notin Vect(u, v)$ (à cause des deux premières coordonnées), donc (u, v, w) est libre, et de cardinal 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

22 Dans $\mathbb{R}^3$, on note $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 5, 6)$ et $w = (m^2, 2m, m)$, où $m \in \mathbb{R}$.

1. La famille (u, v) est-elle libre ? génératrice de $\mathbb{R}^3$?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur m pour que (u, v, w) soit une base de $\mathbb{R}^3$.

1. (u, v) est libre car u et v ne sont pas colinéaires.
   (u, v) n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$ puisqu'elle ne comporte pas assez de vecteurs (il en faudrait au moins 3 pour engendrer $\mathbb{R}^3$).
2. Puisque la famille (u, v, w) est de cardinal 3, on a :

$$\begin{aligned}(u, v, w) \text{ base de } \mathbb{R}^3 &\iff (u, v, w) \text{ libre} \\ &\iff w \text{ n'est pas combinaison linéaire de } u \text{ et } v\end{aligned}$$

   Or, à l'inverse :

$$\begin{aligned}w \text{ est combinaison linéaire de } u \text{ et } v &\iff \exists a, b \in \mathbb{R} \ / \ w = au + bv \\ &\iff \exists a, b \in \mathbb{R} \ / \ \begin{pmatrix} m^2 \\ 2m \\ m \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &\iff \exists a, b \in \mathbb{R} \ / \ \begin{cases} a + 4b = m^2 \\ 2a + 5b = 2m \\ 3a + 6b = m \end{cases} \\ &\iff \exists a, b \in \mathbb{R} \ / \ \begin{cases} a + 4b = m^2 \\ -3b = 2m - 2m^2 \\ -6b = m - 3m^2 \end{cases} \\ &\iff 2(2m - 2m^2) = m - 3m^2 \\ &\iff m^2 - 3m = 0 \\ &\iff m = 0 \text{ ou } m = 3\end{aligned}$$

   Ainsi, si $m = 0$ ou $m = 3$, la famille (u, v, w) est liée.
   (Si $m = 0$, c'est évident. Si $m = 3$, alors on aurait $(9, 6, 3) = -7(1, 2, 3) + 4(4, 5, 6)$).
   Si $m \notin \{0, 3\}$, la famille (u, v, w) est libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$

$$(u, v, w) \text{ base de } \mathbb{R}^3 \iff m \notin \{0, 3\}$$

$\boxed{\textbf{23}}$ Dans $\mathbb{R}^3$, on donne : $F = \text{Vect}((0,1,1),(1,0,2))$ et $G = \text{Vect}((1,-2,0),(1,1,3))$.
Montrer que $F = G$.

Remarquons que $\dim(F) = \dim(G) = 2$ puisque ce sont des plans (engendrés chacun par deux vecteurs non colinéaires).
On a :

$$F = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ 2x + y - z = 0\right\}$$

Remarquons à présent simplement que $(1,-2,0) \in F$ (puisqu'il vérifie l'équation $2x + y - z = 0$
Et également $(1,1,3) \in F$ (puisqu'on a aussi $2x + y - z = 0$).
Donc, F étant stable par combinaison linéaire :

$$G = Vect\big((1,-2,0),(1,1,3)\big) \subset F$$

Finalement $G \subset F$, avec $\dim(G) = \dim(F)$, donc $G = F$.

$\boxed{\textbf{24}}$ Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - 2y + z = 0\}$.
Vérifier la formule de Grassmann.

- F et G sont deux hyperplans dans $\mathbb{R}^3$, donc de dimension 2 chacun.
  Plus précisément, on peut montrer par exemple que :

$$F = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad G = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

- Déterminons $F \cap G$.

  On voit déjà que $(-1, 0, 1) \in F \cap G$, donc $\dim(F \cap G) \geqslant 1$.
  Et on sait par ailleurs que $F \cap G \subset F$ (et $F \cap G \subset G$), donc on a $\dim(F \cap G) \leqslant 2$.

  Si on avait $\dim(F \cap G) = 2$, on aurait $F \cap G \subset F$ avec $\dim(F \cap G) = \dim(F)$, donc $F \cap G = F$, et de même $F \cap G = G$, donc $F = G$. Or, c'est absurde, par exemple $(-1, 1, 0) \in F$ mais $(-1, 1, 0) \notin G$.

  Donc $F \cap G$ est de dimension 1, et on a donc nécessairement :

$$F \cap G = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

- Déterminons $F + G$.

  On a $F \subset (F + G) \subset \mathbb{R}^3$ (et $G \subset (F + G) \subset \mathbb{R}^3$), donc nécessairement $2 \leqslant \dim(F + G) \leqslant 3$.

  Si on avait $\dim(F + G) = 2$, on aurait nécessairement $F = F + G$ et $G = F + G$, donc $F = G$, ce qui est absurde.

  Donc nécessairement $\dim(F + G) = 3$, avec $F + G \subset \mathbb{R}^3$, donc $F + G = \mathbb{R}^3$ tout entier.

$$F + G = \mathbb{R}^3$$

- Finalement :

$$\dim(F) = \dim(G) = 2, \quad \dim(F + G) = 3, \quad \dim(F \cap G) = 1$$

  on a bien :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

25 Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y - z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((2, 1, 0)$.
Déterminer $F \cap G$. F et G sont-ils en somme directe ?

F est un hyperplan dans $\mathbb{R}^3$, donc $\dim(F) = 2$.
Et clairement $\dim(G) = 1$.
On sait que $(F \cap G) \subset G$, donc nécessairement $0 \leqslant \dim(F \cap G) \leqslant \dim(G) = 1$.

Si on avait $\dim(F \cap G) = 1$, alors on aurait $F \cap G = G$ (puisque $F \cap G \subset G$, et $\dim(F \cap G) = \dim(G)$).
Mais alors on aurait $G \subset F$.
Or, le vecteur $(2, 1, 0) \in G$, mais $(2, 1, 0) \notin F$, on ne peut donc pas avoir $G \subset F$!

Donc nécessairement $\dim(F \cap G) = 0$, et donc :

$$\boxed{F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}}$$

Ainsi, F et G sont en somme directe.

$\boxed{\mathbf{26}}$ Soit $F = \text{Vect}((1,1,1),(-1,-1,1))$ et $G = \text{Vect}((0,1,1),(1,1,0))$.
Déterminer $F \cap G$. F et G sont-ils en somme directe ?

Remarquons directement que F et G ne peuvent pas être en somme directe ! S'ils l'étaient, on aurait :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \underbrace{\dim(F \cap G)}_{=0} = 4$$

Or, $F + G \subset \mathbb{R}^3$ donc $\dim(F+G) \leqslant 3$: contradiction.

Ainsi, $F \cap G$ est de dimension au moins 1.

Ici, le plus simple est d'écrire les plans F et G sous forme cartésienne pour trouver $F \cap G$.

$$F = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x - y = 0\right\}$$

et

$$G = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x - y + z = 0\right\}$$

Donc :

$$F \cap G = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ \left| \begin{array}{l} x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right.\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \ / \ x \in \mathbb{R}\right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Donc on a bien $F \cap G \neq \{0\}$ et F et G ne sont pas en somme directe.

27 Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\}$.
Soit $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Montrer que F est G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Puisque $\dim(G) = 1$, $F \cap G$ est de dimension 0 ou 1 (soit $F \cap G = \{0\}$, soit $F \cap G = G$) Or, $(1, 1, 1) \in G$, mais $(1, 1, 1) \notin F$, donc $F \cap G \neq G$

$$\boxed{F \cap G = \{0\}}$$

Les ensembles F et G sont donc en somme directe.

De plus, on a $F = Vect((1, 0, -1), (0, 1, -1))$, donc $\dim(F) = 2$. On a donc :

$$\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

donc $F + G \subset \mathbb{R}^3$ et $\dim(F + G) = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc :

$$\boxed{F + G = \mathbb{R}^3}$$

Finalement, on a donc montré que :

$$F \oplus G = \mathbb{R}^3$$

F et G sont donc supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\textbf{28}}$ Soit $F = \text{Vect}((-1,2,1,0),(-1,2,0,1))$ et $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ y = -2z+t\}$. Déterminer une base et la dimension de F, de G et $F \cap G$.

F est de dimension 2, la famille génératrice proposée étant déjà libre (deux vecteurs non colinéaires), c'est une base.
G est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$, donc $\dim(G) = 3$, et on a :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2z+t \\ z \\ t \end{pmatrix}, x,z,t \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

ce qui fournit une base de G.
$F \cap G \subset F$, donc $\dim(F \cap G) \leqslant 2$.
Si $\dim(F \cap G) = 2$, on aurait $F \cap G = F$, donc $F \subset G$ ce qui faux (par exemple $(-1,2,1,0) \in F$ mais $(-1,2,1,0) \notin G$).
Si $\dim(F \cap G) = 0$, on aurait avec Grassmann que $\dim(F+G) = 5$ ce qui est absurde, $F + G \subset \mathbb{R}^4$!
Donc nécessairement $\dim(F \cap G) = 1$.
Soit $u \in F$: $u = a(-1,2,1,0) + b(-1,2,0,1) = (-a-b, 2a+2b, a, b)$. Alors :

$$u \in G \Longleftrightarrow (2a+2b) = -2(a) + (b) \Longleftrightarrow 4a + b = 0 \Longleftrightarrow b = -4a \Longleftrightarrow u = (3a, -6a, a, -4a)$$

donc :

$$F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} 3a \\ -6a \\ a \\ -4a \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$$

$\boxed{\mathbf{29}}$ Soit $E = \mathbb{R}^3$ et soit $F = \text{Vect}((0,1,1),(1,0,2))$.

Trouver un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $F \oplus \text{Vect}(x) = E$.

On cherche donc un supplémentaire de F dans E sous la forme $Vect(x)$.
C'est cohérent au niveau des dimensions (car $\dim(F) = 2$ et $\dim(E) = 3$, donc un supplémentaire doit être de dimension 1).

En fait, il suffit de choisir un x qui ne soit pas dans $Vect((0,1,1),(1,0,2))$.

Par exemple, prenons $x = (1,0,0)$. Alors :

$$(1,0,0) = a(0,1,1) + b(1,0,2) \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 = b \\ 0 = a \\ 0 = a + 2b \end{cases} \quad : \text{ incompatible}$$

Ainsi, la famille $((0,1,1),(1,0,2))$ étant libre, la famille $((1,0,0),(0,1,1),(1,0,2))$ est libre encore puiqu'on ajoute un vecteur non combinaison linéaire des précédents. La famille obtenue est libre, de cardinal 3, dans E de dimension 3, c'est une base de E. On a donc :

$$E = Vect((1,0,0),(0,1,1),(1,0,2)) = F \oplus Vect(x)$$

La somme étant bien directe puisque la famille est libre, donc l'écriture dans la somme est unique.

$\boxed{\textbf{30}}$ Soit $E = \mathbb{R}^3$ et soit $F = \text{Vect}((1,2,2))$.
Trouver deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^3$ tels que $F \oplus \text{Vect}(x,y) = E$.

On cherche donc un supplémentaire de F dans E sous la forme $Vect(x,y)$.
C'est cohérent au niveau des dimensions (car $\dim(F) = 1$ et $\dim(E) = 3$, donc un supplémentaire doit être de dimension 2).

En fait, il suffit de choisir un x qui ne soit pas dans $Vect((1,2,2))$, puis de choisir un y qui ne soit pas dans $Vect((1,2,2),x)$

Par exemple, prenons $x = (1,0,0)$. Alors, de manière claire x n'est pas colinénaire à $(1,2,2)$.

Ensuite, prenons $y = (0,1,0)$.

$$(0,1,0) = a(1,2,2) + b(1,0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = a+b \\ 1 = 2a \\ 0 = 2a \end{cases} \quad : \text{ incompatible}$$

Ainsi, la famille $((1,2,2),x)$ étant libre, la famille $((1,2,2),x,y)$ est libre encore puiqu'on ajoute un vecteur non combinaison linéaire des précédents. La famille obtenue est libre, de cardinal 3, dans E de dimension 3, c'est une base de E. On a donc :

$$E = Vect((1,2,2),(1,0,0),(0,1,0)) = F \oplus Vect(x,y)$$

La somme étant bien directe puisque la famille est libre, donc l'écriture dans la somme est unique.

31 Montrer que si (u, v, w) est une famille libre dans $\mathbb{R}^n$, il en est de même pour la famille $(u + v, v + w, w + u)$.

Supposons (u, v, w) libre. Montrons que $(u + v, v + w, w + u)$ est libre.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$a(u + v) + b(v + w) + c(w + u) = \overrightarrow{0}$$

Alors :

$$(a + c)u + (a + b)v + (b + c)w = \overrightarrow{0}$$

Et puisque la famille (u, v, w) est libre., on en déduit que :

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Longrightarrow a = b = c = 0$$

Donc la famille $(u + v, v + w, w + u)$ est libre.

$\boxed{\textbf{32}}$ Soit $n \geqslant 1$ et soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. On note pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $y_i = \sum_{k=1}^{i} u_k$.

1. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, exprimer u_j comme combinaison linéaire des y_i.
2. Montrer que $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
3. On suppose $n \geqslant 3$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $u_1 + u_2 - u_3$ dans la base $(y_1, y_2, \dots, y_n)$?

1. On a $u_1 = y_1$, et pour tout j tel que $2 \leqslant j \leqslant n$, on a :

$$u_j = \sum_{k=1}^{j} u_k - \sum_{k=1}^{j-1} u_k = y_j - y_{j-1}$$

2. Par opérations élémentaires sur la famille génératrice :

$$\begin{aligned}
&Vect(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n) \\
=&Vect(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n - y_{n-1}) \\
=&Vect(y_1, y_2, \dots, y_{n-1} - y_{n-2}, y_n - y_{n-1}) \\
=&\vdots \\
=&Vect(y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2, \dots, y_n - y_{n-1}) \\
=&Vect(u_1, u_2, \dots, u_n) = \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Donc $(y_1, \dots, y_n)$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$, de cardinal n, donc c'est une base de $\mathbb{R}^n$.

3.
$$u_1 + u_2 - u_3 = (y_1) + (y_2 - y_1) - (y_3 - y_2) = 2y_2 - y_3$$

donc on a :

$$u_1 + u_2 - u_3 = 0y_1 + 2y_3 - y_3 + 0y_4 + \dots + 0y_n$$

Les coordonnées de $u_1 + u_2 - u_3$ dans la base $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ sont donc $(0, 2, -1, 0, 0, \dots, 0)$.

33 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Soient F et G deux sev de $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$ donc $F \cup G$ est un sev.
Si $G \subset F$, alors $F \cup G = F$, donc $F \cup G$ est un sev.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $F \cup G$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Montrons qu'on a nécessairement $F \subset G$ ou $G \subset F$.

- ⋆ Soit F est inclus dans G.
- ⋆ Soit F n'est pas inclus dans G, mais alors montrons que dans ce cas-là $G \subset F$.
  Par hypothèse, il existe un vecteur $x \in F$ tel que $x \notin G$.
  Alors pour tout $y \in G$, $x + y \in F \cup G$, mais $x + y \notin G$ (car sinon $x = (x + y) - (y) \in G$ aussi).
  Donc pour tout $y \in G$, on a $x + y \in F$, et donc $y = (x + y) - (x) \in F$.
  Ainsi, $G \subset F$.

Finalement, dans tous les cas, soit $F \subset G$, soit $G \subset F$.

34 Soient A, B, C trois sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathbb{R}^n = A \oplus B$ et $A \subset C$.
Montrer que $C = A \oplus (B \cap C)$.

- Déjà, montrons que A et $B \cap C$ sont en somme directe.

  Soit $x \in A \cap (B \cap C)$. Alors $x \in A$ et $x \in B$, donc $x \in A \cap B$. Or, A et B sont en somme directe par hypothèse, donc $A \cap B = \{0\}$, donc $x = 0$.

  Finalement, $A \cap (B \cap C) = \{0\}$, donc $A + (B \cap C) = A \oplus (B \cap C)$.
- Montrons à présent que $C = A + (B \cap C)$.

  Par définition, $A \subset C$ et $(B \cap C) \subset C$, donc par somme, on a

  $$A + (B \cap C) \subset C.$$

  Réciproquement, si $x \in C$, alors $x \in \mathbb{R}^n = A \oplus B$. Donc on peut écrire :

  $$x = y + z \quad \text{avec } y \in A,\ z \in B$$

  mais $z = x - y$, avec $x \in C$ et $y \in A \subset C$, donc (C sev), $z \in C$, donc $z \in B \cap C$.

  Finalement, $x = y + z$ avec $y \in A$ et $z \in B \cap C$. Donc :

  $$C \subset A + (B \cap C)$$

On a donc bien démontré que :

$$\boxed{C = A \oplus (B \cap C)}$$