$\boxed{\mathbf{1}}$ Montrer que $F : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Il faut montrer que :

- F est dérivable sur $\mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = f(x)$

Déjà, montrons que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$F(x) \text{ existe } \iff \sqrt{1+x^2} > -x \iff \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0 \\ \text{ou} \\ x \leqslant 0 \text{ et } 1+x^2 > x^2 \end{array}\right. \quad : \text{ tjs vrai}$$

F est donc bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, par composition, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x)$$

F est donc bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2 Déterminer la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2(x-1)}$ définie sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 3.

La primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2(x-1)}$ sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 3 est exactement la fonction g définie par :

$$\forall x > 1,\ g(x) = \int_3^x \frac{1}{2(t-1)} dt = \left[\frac{1}{2}\ln(t-1)\right]_3^x = \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{2}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right)$$

3 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-2}^{4}(x^3+x-2)dx$
2. $\displaystyle\int_{3}^{11}\sqrt{2x+3}dx$
3. $\displaystyle\int_{2}^{4}\ln(2t)dt$
4. $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$
5. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{t}{\sqrt[3]{t^2+2}}dt$
6. $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}dt$
7. $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt$
8. $\displaystyle\int_{-1/3}^{0}2^{3x+1}dx$
9. $\displaystyle\int_{1}^{e}\frac{(\ln t)^\alpha}{t}dt$ pour $\alpha>0$.
10. $\displaystyle\int_{0}^{2}|x^3-x^2+x-1|dx$
11. $\displaystyle\int_{0}^{5}t|t^2-1|dt$
12. $\displaystyle\int_{0}^{5}\frac{t-1}{|t^2-2t|+1}dt$
13. $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1}{1+t^2}dt$
14. $\displaystyle\int_{1}^{e}\ln(t)dt$
15. $\displaystyle\int_{0}^{1}\text{Arctan}(t)dt.$
16. $\displaystyle\int_{0}^{1}x\text{Arctan}(x)dx.$
17. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}x^2\sin(2x)dx.$
18. $\displaystyle\int_{0}^{1}(x^2-x+1)e^xdx.$
19. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\sin(x)\cos^3(x)dx.$
20. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\sin^2(x)dx.$

1.
$$\int_{-2}^{4}(x^3+x-2)dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-2}^{4}=(64+8-8)-(4+2+4)=\boxed{54}$$

2.
$$\int_{3}^{11}\sqrt{2x+3}dx=\frac{1}{2}\int_{3}^{11}2(2x+3)^{1/2}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(2x+3)^{3/2}\right]_{3}^{11}=\frac{1}{3}(25^{3/2}-9^{3/2})=\frac{1}{3}(125-27)=\boxed{\frac{98}{3}}$$

ou avec un changement de variable $t=2x+3$ ($dt=2dx$),

$$\int_{3}^{11}\sqrt{2x+3}dx=\frac{1}{2}\int_{3}^{11}\sqrt{2x+3}\,(2dx)=\frac{1}{2}\int_{9}^{25}\left(\sqrt{t}\right)dt=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_{9}^{25}=\frac{1}{3}(25^{3/2}-9^{3/2})=\boxed{\frac{98}{3}}$$

3.
$$\int_{2}^{4}\ln(2t)dt=\int_{2}^{4}(\ln 2+\ln t)dt=\Big[\ln(2)t+t\ln(t)-t\Big]_{2}^{4}=4\ln 2+4\ln 4-4-2\ln 2-2\ln 2+2=\boxed{8\ln(2)-2}$$

ou avec un changement de variable $x=2t$ ($dx=2dt$),

$$\int_{2}^{4}\ln(2t)dt=\int_{4}^{8}\ln(x)\frac{dx}{2}=\frac{1}{2}\Big[x\ln(x)-x\Big]_{4}^{8}=\frac{1}{2}\left(8\ln(8)-8-4\ln(4)+4\right)=\boxed{8\ln(2)-2}$$

4.
$$\int_{0}^{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=\Big[\ln(|x^2-x+1|)\Big]_{0}^{2}=\ln(3)-\ln(1)=\boxed{\ln(3)}$$

ou avec un changement de variable $t=x^2-x+1$, on a $dt=(2x-1)dx$, donc :

$$\int_{0}^{2}\frac{1}{x^2-x+1}(2x-1)dx=\int_{1}^{3}\frac{1}{t}dt=\Big[\ln(|t|)\Big]_{1}^{3}=\ln(3)-\ln(1)=\boxed{\ln(3)}$$

5. Sans calcul :

$$\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt[3]{t^2+2}} dt = \boxed{0} \quad \text{puisque la fonction } t \mapsto \frac{t}{\sqrt[3]{t^2+2}} \text{ est impaire sur } [-1,1]\,!$$

ou avec calcul :

$$\int_{-1}^{1} t\left(t^2+2\right)^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}(t^2+2)^{\frac{2}{3}}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{4}\left(3^{2/3}-3^{2/3}\right) = 0$$

6.

$$\int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}} dt = \frac{2}{5}\int_0^1 \frac{5t^4}{2\sqrt{t^5+3}} dt = \frac{2}{5}\left[\sqrt{t^5+3}\right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{5}(2-\sqrt{3})}$$

7.

$$\int_1^2 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt = 2\int_1^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) e^{\sqrt{t}} dt = 2\left[e^{\sqrt{t}}\right]_1^2 = \boxed{2(e^{\sqrt{2}}-e)}$$

8.

$$\int_{-1/3}^{0} 2^{3x+1} dx = 2\int_{-1/3}^{0} 8^x dx = 2\int_{-1/3}^{0} e^{x\ln(8)} dx = 2\left[\frac{1}{\ln(8)} e^{x\ln(8)}\right]_{-1/3}^{0} = \frac{2}{\ln(8)}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{\ln(8)}}.$$

9. Pour $\alpha > 0$,

$$\int_1^e \frac{(\ln t)^\alpha}{t} dt = \left[\frac{1}{\alpha+1}(\ln t)^{\alpha+1}\right]_1^e = \boxed{\frac{1}{\alpha+1}}$$

10. Cherchons le signe de x^3-x^2+x-1 sur $[0,2]$ pour enlever la valeur absolue.

$$x^3-x^2+x-1 = x^2(x-1)+(x-1) = (x-1)(x^2+1)$$

Le signe étant le même que celui de $x-1$, on en déduit que, sur $[1,2]$ $x^3-x^2+x-1 \geqslant 0$ et sur $[0,1]$, on a $x^3-x^2+x-1 \leqslant 0$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^2 |x^3-x^2+x-1| dx &= \int_0^1 (-x^3+x^2-x+1) dx + \int_1^2 (x^3-x^2+x-1) dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2 = \boxed{\frac{5}{2}}\end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}\int_0^5 t|t^2-1| dt &= \int_0^1 t(1-t^2) dt + \int_1^5 t(t^2-1) dt = \int_0^1 (t-t^3) dt + \int_1^5 (t^3-t) dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}\right]_1^5 = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{5^4}{4}-\frac{25}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}+\frac{625}{4}-\frac{25}{2} = \boxed{\frac{577}{4}}\end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}\int_0^5 \frac{t-1}{|t^2-2t|+1} dt &= \int_0^2 \frac{t-1}{(-t^2+2t)+1} dt + \int_2^5 \frac{t-1}{(t^2-2t)+1} dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}\ln(-t^2+2t+1)\right]_0^2 + \left[\frac{1}{2}\ln(t^2-2t+1)\right]_2^5 \\ &= \frac{1}{2}\ln(16) = \boxed{2\ln(2)}\end{aligned}$$

13.
$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \Big[\text{Arctan}(t)\Big]_0^1 = \text{Arctan}(1) - \text{Arctan}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

14.
$$\int_1^e \ln(t)dt = \Big[t\ln(t) - t\Big]_1^e = (e\ln(e) - e) - (1\ln(1) - 1) = \boxed{1}$$

On peut aussi faire une intégration par parties, en remarquant qu'on a $\int_1^e 1 \times \ln(t)dt$.

En posant $\left| \begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v(t) = \ln(t) \end{array}\right.$ et $\left| \begin{array}{l} u(t) = t \\ v'(t) = \dfrac{1}{t} \end{array}\right.$, u et v sont de classe C^1 sur $[1; e]$ et on a :

$$\int_1^e 1 \times \ln(t)dt = \Big[t\ln(t)\Big]_1^e - \int_1^e t \times \frac{1}{t}dt = e - \int_1^e 1dt = e - (e-1) = \boxed{1}$$

15. $\int_0^1 \text{Arctan}(t)dt = \int_0^1 1 \times \text{Arctan}(t)dt.$

On fait une intégration par parties en posant $\left| \begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v(t) = \text{Arctan}(t) \end{array}\right.$ et $\left| \begin{array}{l} u(t) = t \\ v'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \end{array}\right.$, u et v sont de classe C^1 sur $[0; 1]$ et on a :

$$\int_0^1 1 \times \text{Arctan}(t)dt = \Big[t\text{Arctan}(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt = \text{Arctan}(1) - \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)}$$

16. $\int_0^1 x\text{Arctan}(x)dx\,?$

On fait une intégration par parties en posant $\left| \begin{array}{l} u'(x) = x \\ v(x) = \text{Arctan}(x) \end{array}\right.$ et $\left| \begin{array}{l} u(x) = \dfrac{x^2}{2} \\ v'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}\right.$, u et v sont de classe C^1 sur $[0; 1]$ et on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \times \text{Arctan}(x)dx &= \left[\frac{x^2}{2}\text{Arctan}(x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\text{Arctan}(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\Big[x - \text{Arctan}(x)\Big]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

17. On fait deux intégrations par parties successives dans $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x)dx$.

En posant $\left| \begin{array}{l} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \sin(2x) \end{array} \right.$ et $\left| \begin{array}{l} u'(x) = 2x \\ v(x) = -\dfrac{1}{2}\cos(2x) \end{array} \right.$, u et v sont de classe C^1 sur $[0;\pi/2]$ et on a :

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x)dx = \left[-\frac{x^2}{2}\cos(2x) \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} x\cos(2x)dx = \frac{\pi^2}{8} + \int_0^{\pi/2} x\cos(2x)dx$$

En posant à nouveau : $\left| \begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \cos(2x) \end{array} \right.$ et $\left| \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x) \end{array} \right.$, u et v sont de classe C^1 sur $[0;\pi/2]$ et on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x)dx &= \frac{\pi^2}{8} + \left[\frac{x}{2}\sin(2x) \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(2x)dx \\ &= \frac{\pi^2}{8} + 0 - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2x) \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\left(\cos(\pi) - \cos(0)\right) = \boxed{\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

18. On fait deux intégrations par parties successives dans $\displaystyle\int_0^1 (x^2 - x + 1)e^x dx$.

En posant $\left| \begin{array}{l} u(x) = x^2 - x + 1 \\ v'(x) = e^x \end{array} \right.$ et $\left| \begin{array}{l} u'(x) = 2x - 1 \\ v(x) = e^x \end{array} \right.$, u et v sont de classe C^1 sur $[0;1]$ et on a :

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1)e^x dx = \left[\left(x^2 - x + 1\right) e^x \right]_0^1 - \int_0^1 (2x-1)e^x dx = (e-1) - \int_0^1 (2x-1)e^x dx$$

En posant à nouveau : $\left| \begin{array}{l} u(x) = 2x - 1 \\ v'(x) = e^x \end{array} \right.$ et $\left| \begin{array}{l} u'(x) = 2 \\ v(x) = e^x \end{array} \right.$, u et v sont de classe C^1 sur $[0;1]$ et on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 - x + 1)e^x dx &= (e-1) - \left(\left[(2x-1)e^x \right]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx \right) \\ &= (e-1) - \left(e - (-1) - \left[2e^x \right]_0^1 \right) = -2 + (2e - 2) = \boxed{2e - 4} \end{aligned}$$

19. En reconnaissant directement une forme $-u'u^3$, on a :

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos^3(x)dx = \left[-\frac{1}{4}\cos^4(x) \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{4}\cos^4(\pi/2) + \frac{1}{4}\cos^4(0) = \frac{1}{4}$$

20. On linéarise $\sin^2(x)$.

$$\sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{ix}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{-4} = \frac{2\cos(2x) - 2}{-4} = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}$$

Donc :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos(2x)\right) dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x) \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

4 Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_1^e t^n \ln t \; dt$ et $J_n = \int_1^e t^n (\ln t)^2 \; dt$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculons I_n par intégration par parties.
   On pose :
$$\forall t \in [1, e], \quad \left| \begin{array}{l} u'(t) = t^n \\ v(t) = \ln(t) \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} u(t) = \dfrac{1}{n+1} t^{n+1} \\ v'(t) = \dfrac{1}{t} \end{array} \right.$$
   On a alors :
$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \ln(t) \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{n+1} t^{n+1} \times \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_1^e t^n dt \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_1^e \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculons J_n par intégration par parties.
   On pose :
$$\forall t \in [1, e], \quad \left| \begin{array}{l} u'(t) = t^n \\ v(t) = (\ln(t))^2 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} u(t) = \dfrac{1}{n+1} t^{n+1} \\ v'(t) = \dfrac{2\ln(t)}{t} \end{array} \right.$$
   On a alors :
$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} (\ln(t))^2 \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{n+1} t^{n+1} \times \frac{2\ln(t)}{t} \right) dt \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_n \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{2}{n+1} \left(\frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{2e^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{2e^{n+1}}{(n+1)^3} - \frac{2}{(n+1)^3} \end{aligned}$$

5 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-t^2}dt$
2. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{t(t-1)}dt$
3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{3t+1}{t(t+1)}dt$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t-2)(t+3)}dt$
5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)(t+2)}dt$
6. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{t^2}{t^2+4t-5}dt$

1.
$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{1}{1-t^2}dt &= \int_2^3 \frac{1}{(1-t)(1+t)}dt = \int_2^3 \left(\frac{1/2}{1-t} + \frac{1/2}{1+t}\right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}\ln(|1-t|) + \frac{1}{2}\ln(|1+t|)\right]_2^3 = -\frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(4) + \frac{1}{2}\ln(1) - \frac{1}{2}\ln(3) = \boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\end{aligned}$$

2.
$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{t(t-1)}dt = \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right) dt = \Big[\ln(|t-1|) - \ln(|t|)\Big]_{-2}^{-1} = \ln(2) - \ln(1) - \ln(3) + \ln(2) = \boxed{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}$$

3.
$$\int_1^2 \frac{3t+1}{t(t+1)}dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{t+1}\right) dt = \Big[\ln(|t|) + 2\ln(|t+1|)\Big]_1^2 = \ln(2) + 2\ln(3) - \ln(1) - 2\ln(2) = \boxed{\ln\left(\frac{9}{2}\right)}$$

4.
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(t-2)(t+3)}dt &= \int_0^1 \left(\frac{1/5}{t-2} - \frac{1/5}{t+3}\right) dt = \left[\frac{1}{5}\ln(|t-2|) - \frac{1}{5}\ln(|t+3|)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{5}\ln(1) - \frac{1}{5}\ln(4) - \frac{1}{5}\ln(2) + \frac{1}{5}\ln(3) = \boxed{\frac{1}{5}\ln\left(\frac{3}{8}\right)}\end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)(t+2)}dt &= \int_1^2 \left(\frac{1/2}{t} - \frac{1}{t+1} + \frac{1/2}{t+2}\right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln(|t|) - \ln(|t+1|) + \frac{1}{2}\ln(|t+2|)\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2}\ln(2) - \ln(3) + \frac{1}{2}\ln(4) - \frac{1}{2}\ln(1) + \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(3) = \boxed{\frac{5}{2}\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(3)}\end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \frac{t^2}{t^2+4t-5}dt &= \int_{-1}^0 \left(\frac{(t^2+4t-5)-4t+5}{t^2+4t-5}\right) dt \\ &= \int_{-1}^0 \left(1 - \frac{4t-5}{(t-1)(t+5)}\right) dt = \int_{-1}^0 \left(1 - \frac{-1/6}{t-1} - \frac{25/6}{t+5}\right) dt \\ &= \left[t + \frac{1}{6}\ln(|t-1|) - \frac{25}{6}\ln(|t+5|)\right]_{-1}^0 \\ &= -\frac{25}{6}\ln(5) + 1 - \frac{1}{6}\ln(2) + \frac{25}{6}\ln(4) = \boxed{1 + \frac{49}{6}\ln(2) - \frac{25}{6}\ln(5)}\end{aligned}$$

6 Calculer les intégrales suivantes avec le changement de variable indiqué.

1. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 4} \sqrt{e^x - 1}\, dx \quad (u = \sqrt{e^x - 1})$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt \quad (x = t + 1)$
3. $\displaystyle\int_1^{4/3} \frac{t}{(3t-2)^5} dt \quad (u = 3t - 2)$
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{2t}}{1 - e^t} dt \quad (t = \ln(x))$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t} - t}{\sqrt{t} + 1} dt \quad (x = \sqrt{t})$
6. $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{t}} dt \quad (t = x^2)$
7. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin(t)} \ (u = \cos(t))$
8. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{dt}{\cos(t)} \ (x = \sin(t))$
9. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t(t^3+1)} dt \quad (u = t^3)$
10. $\displaystyle\int_1^3 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt \quad (t = x^2)$
11. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)\sin(x)} dx \ (u = \sin(x))$
12. $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x\cos(x^2) dx \ (x = \sqrt{t})$

1. On souhaite faire le changement de variable $u = \sqrt{e^x - 1}$.
   Notons pour tout $x \in [\ln(2), \ln(4)], \varphi(x) = \sqrt{e^x - 1}$.
   La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\ln(2), \ln(4)]$ et $\forall x \in [\ln(2), \ln(4)],\ \varphi'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$.
   On a donc :
   $$u = \sqrt{e^x - 1} \quad \text{avec} \quad du = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx$$
   et remarquons que : $\quad$ u $= \sqrt{e^x - 1} \Longleftrightarrow e^x - 1 = u^2 \Longleftrightarrow e^x = u^2 + 1$
   On a alors :
   $$\begin{aligned} I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \sqrt{e^x - 1} dx &= \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{2(\sqrt{e^x - 1})^2}{e^x} \times \left(\frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx\right) \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{2\varphi^2(x)}{\varphi^2(x) + 1} \varphi'(x) dx \\ &= \int_{\varphi(\ln 2)}^{\varphi(\ln(4))} \frac{2u^2}{u^2 + 1} du \\ &= 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{u^2 + 1 - 1}{u^2 + 1} du \\ &= 2\Big[u - \text{Arctan}(u)\Big]_1^{\sqrt{3}} \\ &= 2\left(\sqrt{3} - \text{Arctan}(\sqrt{3})\right) - 2\left(1 - \text{Arctan}(1)\right) \\ &= \boxed{2\sqrt{3} - 2\frac{\pi}{3} - 2 + 2\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

2. On fait le changement de variable $x = t + 1$ $(dx = dt)$, on a donc :
   $$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt = \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - 2\sqrt{x}\right]_1^2 = \frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1) - 2(\sqrt{2} - 1)$$

3. On fait le changement de variable $u = 3t - 2$ ($du = 3dt$).

$$\int_1^{4/3} \frac{t}{(3t-2)^5}dt = \int_1^2 \frac{\frac{u+2}{3}}{u^5}\left(\frac{1}{3}du\right) = \frac{1}{9}\int_1^2 \left(\frac{1}{u^4} + \frac{2}{u^5}\right)du = \frac{1}{9}\left[-\frac{1}{3u^3} - \frac{1}{2u^4}\right]_1^2 = \frac{1}{9}\left(\frac{7}{24} + \frac{15}{32}\right)$$

4. Remarquons que cette fois, le changement de variable est donné en sens inverse. On veut poser $t = \ln(x)$ avec $dt = \frac{1}{x}dx$.
Remarquons que $t = 1 \Leftrightarrow x = e$ et $t = 2 \Leftrightarrow x = e^2$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{e^{2t}}{1-e^t}dt &= \int_e^{e^2} \frac{e^{2\ln x}}{1-e^{\ln x}}\left(\frac{1}{x}dx\right) = \int_e^{e^2} \frac{x^2}{x(1-x)}dx = \int_e^{e^2} \frac{x}{1-x}dx = \int_e^{e^2}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)dx \\ &= \Big[-\ln(|1-x|) - x\Big]_e^{e^2} = -\ln(e^2-1) - e^2 + \ln(e-1) + e = e - e^2 - \ln(e+1)\end{aligned}$$

5. On veut calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}-t}{\sqrt{t}+1}dt$ avec le changement de variable $x = \sqrt{t}$.
Mais il y a un problème : la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ .... On ne peut pas faire apparaître $\dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt$, lorsque $t \in [0,1]$.

Il suffit d'écrire le changement de variable à l'inverse et d'écrire $\boxed{t = x^2}$ (et $dt = 2xdx$), puisque la fonction $x \mapsto x^2$ est, elle, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sqrt{t}-t}{\sqrt{t}+1}dt &= \int_0^1 \frac{x-x^2}{x+1}(2xdx) = 2\int_0^1 \frac{x^2-x^3}{x+1}dx = 2\int_0^1 \frac{(x+1)(-x^2+2x-2)+2}{x+1}dx \\ &= 2\left[-\frac{x^3}{3} + x^2 - 2x + 2\ln(x+1)\right]_0^1 = 2\left(-\frac{4}{3} + 2\ln(2)\right)\end{aligned}$$

6. On pose $t = x^2$ ($dt = 2xdx$), on a alors :

$$\int_0^1 e^{\sqrt{t}}dt = \int_0^1 e^x(2xdx) = 2\int_0^1 xe^x dx = 2\Big[(x-1)e^x\Big]_0^1 = \boxed{2}$$

7. On pose $u = \cos(t)$, donc $du = (-\sin(t))dt$. On a donc :

$$\begin{aligned}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin(t)}dt &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{-1}{\sin^2(t)}(-\sin(t)dt) \\ &= -\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{1-\cos^2(t)}(-\sin(t)dt) \\ &= -\int_{\sqrt{2}/2}^{0} \frac{1}{1-u^2}du \\ &= \int_0^{\sqrt{2}/2}\left(\frac{1/2}{1-u} + \frac{1/2}{1+u}\right)du \\ &= \frac{1}{2}\Big[-\ln(1-u) + \ln(1+u)\Big]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

8. On pose $x = \sin(t)$, donc $dx = (cos(t))dt$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/3} \frac{dt}{\cos(t)} &= \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2(t)} (\cos(t)dt) \\
&= \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\left(1 - \sin^2(t)\right)} \cos(t)dt \\
&= \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{1 - x^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}/2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \Big[- \ln(1-x) + \ln(1+x) \Big]_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right)
\end{aligned}$$

9. On pose $u = t^3$, donc $du = 3t^2 dt$.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{t(t^3+1)} dt &= \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{1}{t^3(t^3+1)} (3t^2 dt) \\
&= \frac{1}{3} \int_1^8 \frac{1}{u(u+1)} du \\
&= \frac{1}{3} \int_1^8 \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du \\
&= \frac{1}{3} \Big[\ln(u) - \ln(u+1) \Big]_1^8 \\
&= \frac{1}{3} (\ln(8) - \ln(9) + \ln(2)) = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{16}{9} \right) = \frac{1}{6} \ln \left(\frac{4}{3} \right)
\end{aligned}$$

10. On veut poser $t = x^2$, donc $dt = 2xdx$.
    Remarquons que :

$$t = 1 \iff x = 1 \quad \text{et} \quad t = 3 \iff x = \sqrt{3}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\ln(x^2)}{\sqrt{x^2}} 2xdx \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} 4 \ln(x) dx \\
&= 4 \Big[x \ln(x) - x \Big]_1^{\sqrt{3}} \\
&= 2\sqrt{3} \ln(3) - 4\sqrt{3} + 4
\end{aligned}$$

11. On veut calculer $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)\sin(x)}dx$ avec le changement de variable $u = \sin(x)$.
    Remarquons que $u = \sin(x)$ donne $du = \cos(x)dx$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)\sin(x)}dx &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos(x)dx}{\cos^2(x)\sin(x)}dx \\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{(1-\sin^2(x))\sin(x)}\cos(x)dx \\
&= \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{(1-u^2)u}du \\
&= \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \left(\frac{1/2}{1-u} - \frac{1/2}{1+u} + \frac{1}{u}\right) du \\
&= \left[-\frac{1}{2}\ln(1-u) - \frac{1}{2}\ln(1+u) + \ln(u)\right]_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \\
&= \left[\ln\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\right]_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \\
&= \ln\left(\sqrt{3}\right) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \ln(3)
\end{aligned}$$

12. Calculons $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x\cos(x^2)dx$ avec le changement de variable $x = \sqrt{t}$
    On pose $x = \sqrt{t}$ donc $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$. On a donc :

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x\cos(x^2)dx = \int_{\pi}^{4\pi} 2\sqrt{t}\cos(t)\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}dt\right) = \int_{\pi}^{4\pi} \cos(t)dt = \Big[\sin(t)\Big]_{\pi}^{4\pi} = \sin(4\pi) - \sin(\pi) = 0$$

7 On note pour $p, q \in \mathbb{N}$, $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

1. Calculer $I(0,q)$ et $I(p,0)$ pour $p, q \in \mathbb{N}$.
2. Pour $p, q \in \mathbb{N}$, exprimer $I(p+1,q)$ en fonction de $I(p,q+1)$.
3. Calculer $I(p,q)$ en fonction de p et q.

1. $$I(0,q) = \int_0^1 (1-t)^q dt = \left[-\frac{(1-t)^{q+1}}{q+1} \right]_0^1 = \frac{1}{q+1}$$
   et
   $$I(p,0) = \int_0^1 t^p dt = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$$
2. Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on a : $I(p+1,q) = \int_0^1 t^{p+1}(1-t)^q dt$.
   En posant $\left| \begin{array}{l} u(t) = t^{p+1} \\ v'(t) = (1-t)^q \end{array} \right.$ et $\left| \begin{array}{l} u'(t) = (p+1)t^p \\ v(t) = \dfrac{-(1-t)^{q+1}}{q+1} \end{array} \right.$, on a :
   $$I(p+1,q) = \left[-\frac{t^{p+1}(1-t)^{q+1}}{q+1} \right]_0^1 + \frac{p+1}{q+1} \int_0^1 t^p(1-t)^{q+1} dt = 0 + \frac{p+1}{q+1} I(p,q+1)$$
3. On a donc, en itérant plusieurs fois la relation précédente, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$,
   $$\begin{aligned} I(p,q) &= \frac{p}{q+1} I(p-1,q+1) \\ &= \frac{p}{q+1} \times \frac{p-1}{q+2} I(p-2,q+2) \\ &= \frac{p(p-1)(p-2)}{(q+1)(q+2)(q+3)} I(p-3,q+3) \\ &= \vdots \\ &= \frac{p(p-1)(p-2)\cdots 1}{(q+1)(q+2)(q+3)\cdots(q+p)} I(0,q+p) \\ &= \frac{p!}{(q+1)(q+2)\cdots(q+p)} \times \frac{1}{(q+p+1)} \\ &= \frac{p!q!}{(p+q+1)!} \end{aligned}$$

8 On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.

1. La suite (I_n) est-elle monotone ?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{(n+1)!}$
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x dx - \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \left(\frac{1-x}{n+1} - 1 \right) dx$$
Or, pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{(1-x)^n}{n!} e^x \left(\dfrac{1-x}{n+1} - 1 \right) \leqslant 0$, donc par positivité de l'intégrale $(0 < 1)$, on a :
$$I_{n+1} - I_n \leqslant 0$$
La suite (I_n) est donc décroissante.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \leqslant \frac{(1-x)^n}{n!} e$$
Donc par positivité de l'intégrale, $(0 < 1)$,
$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n!} \int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{e}{n!} \int_0^1 t^n dt = \frac{e}{n!} \times \frac{1}{n+1} = \frac{e}{(n+1)!}$$
3. On a $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.
Notons pour tout $x \in [0,1]$, $\left| \begin{array}{l} u'(x) = (1-x)^n \\ v(x) = \dfrac{e^x}{n!} \end{array} \right.$, $\left| \begin{array}{l} u(x) = -\dfrac{1}{n+1}(1-x)^{n+1} \\ v'(x) = \dfrac{e^x}{n!} \end{array} \right.$.
Les fonctions u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc on a par IPP :
$$I_n = \left[-\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1} \frac{e^x}{n!} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x dx = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$$
4. On a donc :
$$\forall k \geqslant 0,\ I_k - I_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}$$
En sommant cette relation pour $k \in [\![0,n]\!]$, on a donc :
$$\sum_{k=0}^{n-1} (I_k - I_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!}$$
autrement dit (somme télescopique)
$$I_0 - I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \Longrightarrow I_n = I_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \int_0^1 e^x dx - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = e - 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \boxed{e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}$$

9 On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n dx$.

1. Montrer que la suite (I_n) est décroissante. Est-elle minorée ?
2. Montrer que sur $[1,e]$, $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \frac{x}{e}$. En déduire un encadrement de I_n.
3. Montrer que : $\forall n \geqslant 0,\ I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$.

1. $$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} - I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^{n+1}dx - \int_1^e x^2(\ln x)^n dx = \int_1^e x^2(\ln x)^n\left(\ln(x) - 1\right)dx$$
   Or, $\forall x \in [1,e]$, $x^2(\ln x)^n(\ln(x)-1) \leqslant 0$, donc par positivité $(1 < e)$, $\int_1^e x^2(\ln x)^n\left(\ln(x)-1\right)dx \leqslant 0$.
   On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} - I_n \leqslant 0$. La suite (I_n) est donc <u>décroissante</u>.
   De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [1,e], x^2(\ln x)^n \geqslant 0$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geqslant 0$. La suite (I_n) est donc minorée (par 0).

2. Puisque ln est croissante, on a $\forall x \in [1,e]$, $\ln(x) \geqslant \ln(1) = 0$.
   Posons pour tout $x \in [1,e], \varphi(x) = \ln(x) - \frac{x}{e}$.
   La fonction φ est dérivable sur $[1,e]$ et on a : $\forall x \in [1,e], \varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} \geqslant 0$.
   La fonction φ est donc croissante, et comme $\varphi(e) = 0$, on a $\forall x \in [1,e], \varphi(x) \leqslant 0$. Finalement :
   $$\forall x \in [1,e],\ 0 \leqslant \ln(x) \leqslant \frac{x}{e}$$
   D'où :
   $$\forall x \in [1,e], 0 \leqslant x^2(\ln x)^n \leqslant x^2\left(\frac{x}{e}\right)^n$$
   Par positivité $(1 < e)$, on en déduit que : $0 \leqslant \int_1^e x^2(\ln x)^n dx \leqslant \frac{1}{e^n}\int_1^e x^{n+2}dx$,
   autrement dit :
   $$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e^{n+3}-1}{(n+3)e^n} \leqslant \frac{e^{n+3}}{(n+3)e^n} = \frac{e^3}{n+3}$$
   D'où :
   $$\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e^3}{n+3}}$$

3. Soit $n \geqslant 0$. On a $I_{n+1} = \int_1^e x^2(\ln x)^{n+1}dx$.
   Notons pour tout $x \in [1,e]$, $\left|\begin{array}{l} u'(x) = x^2 \\ v(x) = (\ln x)^{n+1}\end{array}\right.$ et $\left|\begin{array}{l} u(x) = \frac{x^3}{3} \\ v'(x) = (n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n\end{array}\right.$. Les fonctions u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[1,e]$ donc on peut intégrer par parties :
   $$I_{n+1} = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}(n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n dx = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}I_n$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1-x}dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Déterminer une relation entre I_n et I_{n-1} pour $n \geqslant 1$.
   En déduire la valeur de I_n pour tout $n \geqslant 1$.

1.
$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx = \int_0^1 (1-x)^{1/2}dx = \left[-\frac{(1-x)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x}dx &= \int_0^1 (x-1+1)\sqrt{1-x}dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1-x}dx - \int_0^1 (1-x)^{3/2}dx \\
&= I_0 - \left[-\frac{(1-x)^{5/2}}{5/2}\right]_0^1 = I_0 - \frac{2}{5} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}
\end{aligned}$$

2. Pour $n \geqslant 1$,
$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx = \int_0^1 x^{n-1}(1-(1-x))\sqrt{1-x}dx = \int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}dx - \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{3/2}dx \\
&= I_{n-1} - \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{3/2}dx
\end{aligned}$$

On fait une IPP dans l'intégrale obtenue.
Posons $\forall x \in [0,1]$, $u'(x) = x^{n-1}$, $v(x) = (1-x)^{3/2}$, $u(x) = \dfrac{1}{n}x^n$ et $v'(x) = -\dfrac{3}{2}\sqrt{1-x}$. On a alors :
$$I_n = I_{n-1} - \left[\frac{1}{n}x^n(1-x)^{3/2}\right]_0^1 - \frac{3}{2n}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$$

D'où :
$$I_n = I_{n-1} - \frac{3}{2n}I_n \Longrightarrow \left(1+\frac{3}{2n}\right)I_n = I_{n-1} \Longrightarrow \boxed{I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1}}$$

On a donc :
$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{2}{5}I_0 \\
I_2 &= \frac{4}{7}I_1 = \frac{4\times 2}{7\times 5}I_0 \\
I_3 &= \frac{6}{9}I_2 = \frac{6\times 4\times 2}{9\times 7\times 5}I_0
\end{aligned}$$

par une récurrence immédiate :
$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 4\times 2}{(2n+3)(2n+1)(2n-1)\cdots 7\times 5}I_0 \\
&= \frac{(2n+2)(2n)^2(2n-2)^2(2n-4)^2\cdots 4^2\times 2^2}{(2n+3)!}\times 2 \\
&= \boxed{(4n+4)\frac{(2^n n!)^2}{(2n+3)!}}
\end{aligned}$$

11 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Etablir une relation entre I_n et I_{n+1}. En déduire la valeur de I_n.
2. Calculer alors $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1.

$$I_{n+1} = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt = \int_0^1 (1-t^2)(1-t^2)^n dt = \int_0^1 (1-t^2)^n dt - \int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt = I_n - \int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt$$

On pose $\forall t \in [0,1]$, $\left|\begin{array}{l} u(t) = t \\ v'(t) = t(1-t^2)^n \end{array}\right.$, $\left|\begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v(t) = \frac{1}{2(n+1)}(1-t^2)^{n+1} \end{array}\right.$

Les fonctions u et v étant bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$

$$I_{n+1} = I_n - \left[\frac{1}{2(n+1)} t(1-t^2)^{n+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2(n+1)}(1-t^2)^{n+1} dt = I_n + \frac{1}{2(n+1)} I_{n+1}$$

On a donc finalement :

$$I_{n+1} = I_n + \frac{1}{2n+2} I_{n+1} \Longrightarrow \boxed{I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n}$$

On a alors en utilisant la relation de récurrence :

$$I_1 = \frac{2}{3} I_0, \qquad \text{puis} \qquad I_2 = \frac{4}{5} I_1 = \frac{4\times 2}{5 \times 3} I_0$$

puis par une récurrence immédiate, on a :

$$I_n = \frac{(2n)(2n-2)(2n-4)\times\cdots\times 4\times 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\times\cdots\times 5\times 3} I_0$$

Puisque $I_0 = \displaystyle\int_0^1 1 dt = 1$, on donc :

$$\begin{aligned} \forall n \geqslant 0, I_n &= \frac{(2n)(2n-2)(2n-4)\times\cdots\times 4\times 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\times 5\times 3} \\ &= \frac{((2n)(2n-2)(2n-4)\times 4\times 2)^2}{(2n+1)\times(2n)!} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \boxed{\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}} \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k \int_0^1 t^{2k} dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-t^2)^k\right) dt \\ &= \int_0^1 (1-t^2)^n dt = I_n \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \boxed{S_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}}$$

12 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ln(2)$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(2) - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
3. En déduire un encadrement de u_n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$\forall t \in [0,1],\ \frac{1}{1+t+t^n} \leqslant \frac{1}{1+t}$$
D'où par positivité de l'intégrale ($0 < 1$)
$$\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dx \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt$$
autrement dit :
$$\boxed{u_n \leqslant \ln(2)}$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$,
$$\ln(2) - u_n = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} \right) dt = \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} dt \leqslant \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$
3. On en déduit donc que :
$$\ln(2) - \frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \ln(2)$$

13 Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction F et montrer que F est dérivable sur son domaine de définition. Calculer sa dérivée.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $F(x) \leq 0$.
3. Montrer que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ |F(x)| \leq e|x|$.
5. Etudier la parité de la fonction F.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $t \mapsto e^{\cos(t)}$ étant continue sur $\mathbb{R}$ (par composition), elle l'est également sur l'intervalle $[0, x]$ (ou $[x, 0]$). Donc l'intégrale $\int_0^x e^{\cos(t)} dt$ est bien définie et $F(x)$ existe : $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$.

   La fonction $t \mapsto e^{\cos(t)}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive g sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On a alors :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^x e^{\cos(t)} dt = \Big[g(t)\Big]_0^x = g(x) - g(0)$$
   Ainsi, par somme d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et d'une fonction constante, F est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = g'(x) = e^{\cos(x)}$$
   (on pouvait également reconnaître directement pour F l'unique primitive de $t \mapsto e^{\cos(t)}$ qui s'annule en 0).
2. <u>Soit $x > 0$.</u> Alors, la fonction $t \mapsto e^{\cos(t)}$ étant strictement positive et continue sur l'intervalle $[0, x]$, par positivité de l'intégrale, les bornes sont dans le bon ordre, on obtient $\int_0^x e^{\cos(t)} dt > 0$.

   <u>Soit $x \leqslant 0$.</u> Alors : $F(x) = \int_0^x e^{\cos(t)} dt = -\int_x^0 e^{\cos(t)} dt$. La fonction $t \mapsto e^{\cos(t)}$ étant positive sur l'intervalle $[x, 0]$, par positivité de l'intégrale, on obtient $\int_x^0 e^{\cos(t)} dt \geqslant 0$ et donc $F(x) \leqslant 0$.

   On a donc montré que : $\boxed{F(x) \leqslant 0 \iff x \leqslant 0}$.
3. La fonction F est dérivable d'après la question 1 et $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = e^{\cos(x)} > 0$, donc la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. <u>Si $x \geqslant 0$,</u> $\left|\int_0^x e^{\cos(t)} dt\right| \leqslant \int_0^x e^{\cos(t)} dt \leqslant \int_0^x e^1 dt = xe.$

   <u>Si $x \leqslant 0$,</u> $\left|\int_0^x e^{\cos(t)} dt\right| = \int_x^0 e^{\cos(t)} dt \leqslant \int_x^0 e^1 dt = -xe.$

   Finalement
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ |F(x)| \leqslant e|x|$$
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant un changement de variable $u = -t$ on obtient :
   $$F(-x) = \int_0^{-x} e^{\cos t} dt = \int_{-0}^{x} e^{\cos(-u)}(-du) = -\int_0^x e^{\cos(u)} du = -F(x)$$
   La fonction F est donc impaire.

14 Pour chacune des fonctions suivantes, donner :

— le domaine de définition de f
— le signe de f sur le domaine de définition,
— la parité éventuelle
— la dérivée de f si elle existe

1. $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t - e^{-t}} dt$
2. $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt$
3. $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x |t| dt$
4. $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^x |t|^3 dt$
5. $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\sqrt{t}}{t^4+1} dt$
6. $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^0 \sqrt{1+t^2} dt$
7. $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t^4}$
8. $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^x e^{-t^2} dt$
9. $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2} dt$

1.
$$\boxed{f(x) = \int_0^x \frac{t}{e^t - e^{-t}} dt}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{e^t - e^{-t}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi, quelque soit la valeur de x, la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{e^t - e^{-t}}$ ne sera jamais continue sur $[0, x]$ (ou $[x, 0]$), donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t - e^{-t}} dt$ n'est pas bien définie.
Ainsi f n'est pas définie.

2.
$$\boxed{f(x) = \int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt$ est bien définie, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \geqslant 0$,
$$\forall t \in [0, x],\ \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \geqslant 0$$
donc par positivité ($0 \leqslant x$),
$$\int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt \geqslant 0$$
Ainsi, f est positive sur $\mathbb{R}^+$.

Pour $x \leqslant 0$,
$$\forall t \in [x, 0],\ \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \leqslant 0$$
donc par positivité ($x \leqslant 0$) (bornes dans le mauvais sens),
$$\int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt \geqslant 0$$
Ainsi, f est positive aussi sur $\mathbb{R}^-$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \int_0^{-x} \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt \overset{u=-t}{=} \int_0^x \frac{e^{-u} - e^u}{e^{-u} + e^u} (-du) = \int_0^x \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} du = f(x)$$

ainsi, f est paire.

Enfin, f est par définition la primitive de $t \mapsto \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ qui s'annule en 0, donc f est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

3.

$$\boxed{f(x) = \int_0^x |t| dt}$$

La fonction $t \mapsto |t|$ est continue sur $\mathbb{R}$, ainsi, pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x |t| dt$ existe bien.
La fonction f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.
De plus, la fonction $t \mapsto |t|$ est toujours positive, donc l'intégrale est positive si et seulement si les bornes sont dans le bon sens :

$$\forall x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \leqslant 0,\ f(x) \leqslant 0$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \int_0^{-x} |t| dt \overset{u=-t}{=} \int_0^x |-u|(-du) = -\int_0^x |u| du = -f(x)$$

Ainsi, f est impaire.

Enfin, f est par définition la primitive de $t \mapsto |t|$ qui s'annule en 0. Elle est donc dérivable et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = |x|$$

4.

$$\boxed{f(x) = \int_1^x |t|^3 dt}$$

La fonction $t \mapsto |t|^3$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^x |t|^3 dt$ a bien un sens.
Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}$.
De plus, la fonction $t \mapsto |t|^3$ est toujours positive, donc l'intégrale est positive si et seulement si les bornes sont dans le bon sens. On a donc :

$$\forall x \geqslant 1,\ f(x) \geqslant 0, \qquad \forall x \leqslant 1,\ f(x) \leqslant 0$$

La fonction f ne peut pas être paire (vu son signe) et n'est pas impaire puisque $f(0) \neq 0$. Aucune parité donc.

Enfin, f est exactement la primitive de $t \mapsto |t|^3$ qui s'annule en 1, donc par définition f est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = |x|^3$$

5.

$$\boxed{f(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{t^4+1}}$$

La fonction $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{t^4+1}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
Ainsi, $f(x)$ existe si et seulement si $x \geqslant 0$ car c'est le seul cas possible où $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{t^4+1}$ soit continue sur $[0, x]$.

$$D_f = [0, +\infty[$$

De plus, pour tout $t \geqslant 0$, $\dfrac{\sqrt{t}}{t^4+1} \geqslant 0$, les bornes étant dans le bon sens, on a donc que :

$$\forall x \geqslant 0, f(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{t^4+1} dt \geqslant 0$$

f n'étant pas définie sur $]-\infty, 0[$, elle ne peut être ni paire ni impaire.

Enfin, par définition, f est la primitive de $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{t^4+1}$ qui s'annule en 0, elle est donc dérivable sur $[0, +\infty[$ et :

$$\forall x \geqslant 0,\ f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^4+1}$$

6.

$$\boxed{f(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^2} dt}$$

La fonction $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc pour tout réel x, elle est continue sur $[0, x]$ ou $[x, 0]$, l'intégrale a donc toujours un sens :

$$D_f = \mathbb{R}$$

De plus, $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ est toujours positive, donc l'intégrale est positive si et seulement si les bornes sont dans le bon sens :

$$\forall x \leqslant 0,\ f(x) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \geqslant 0,\ f(x) \leqslant 0$$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \int_{-x}^0 \sqrt{1+t^2} dt \overset{u=-t}{=} \int_x^0 \sqrt{1+(-u)^2}(-du) = -\int_x^0 \sqrt{1+u^2} du = -f(x)$$

donc f est impaire.

Enfin, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -\int_0^x \sqrt{1+t^2} dt = -\varphi(x)$$

où φ est la primitive de $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ qui s'annule en 0, donc f est bien dérivable et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\varphi'(x) = -\sqrt{1+x^2}$$

7.

$$\boxed{f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t^4}}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1-t^4}$ est définie et continue sur $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t^4}$ a bien un sens lorsque $t \mapsto \frac{1}{1-t^4}$ est continue sur le segment $[0,x]$ (ou $[x,0]$), donc cela impose que $x \in]-1,1[$ (car si $x \notin]-1,1[$ la fonction sous l'intégrale ne serait pas continue sur tout le segment $[0,x]$ ou $[x,0]$),

$$D_f =]-1,1[$$

Pour tout $t \in]-1,1[$, $\frac{1}{1-t^4} \geqslant 0$, donc l'intégrale définissant $f(x)$ est positive si et seulement si les bornes sont dans le bon sens :

$$\forall x \in [0,1[, \quad f(x) \geqslant 0, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]-1,0], \quad f(x) \leqslant 0$$

On a :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{1-t^4} dt \overset{u=-t}{=} \int_0^x \frac{1}{1-(-u)^4}(-du) = -\int_0^x \frac{1}{1-u^4} du = -f(x)$$

donc f est impaire.

Enfin, f est par définition la primitive sur $]-1,1[$ de $t \mapsto \dfrac{1}{1-t^4}$ qui s'annule en 0, elle est donc dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \frac{1}{1-x^4}$$

8.

$$\boxed{f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt}$$

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel x l'intégrale $\displaystyle\int_1^x e^{-t^2} dt$ a bien un sens.

$$D_f = \mathbb{R}$$

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ étant toujours positive, l'intégrale est positive si et seulement si ses bornes sont dans le bon sens.

$$\forall x \geqslant 1,\ f(x) \geqslant 0, \qquad \text{et} \qquad \forall x \leqslant 1,\ f(x) \leqslant 0$$

Vu le signe, f ne peut pas être paire, et comme $f(0) \neq 0$, f ne peut pas être impaire. Aucune parité.
Enfin, f est par définition la primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ qui s'annule en 1, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{-x^2}$$

9.

$$\boxed{f : x \mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2} dt}$$

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[x, 2x]$ (ou sur $[2x, x]$), donc l'intégrale est toujours bien définie.

$$D_f = \mathbb{R}$$

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est toujours positive, donc $f(x)$ est positif si et seulement si les bornes sont dans le bon sens

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \leqslant 0, \quad f(x) \leqslant 0$$

Pour tout réel x,

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} e^{-t^2} dt \overset{u=-t}{=} \int_x^{2x} e^{-(-u)^2} (-du) = -\int_x^{2x} e^{-u^2} du = -f(x)$$

Ainsi, f est impaire.

Notons φ une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto e^{-t^2}$ (la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ étant continue, elle admet bien au moins une primitive), on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$$

Ainsi, f est dérivable en tant que somme de composées de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2\varphi'(2x) - \varphi'(x) = 2e^{-(2x)^2} - e^{-x^2} = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$$

15 Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. En remarquant que $\ln(2) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t}$ pour tout réel $x > 0$, montrer que f admet $\ln(2)$ pour limite en 0.
3. Montrer que f peut se prolonger en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.
4. Étudier les variations de f. Étudier le signe de $f(x)$ sur le domaine de définition de f.
5. Tracer l'allure de la courbe de f.

1. La fonction f est-elle déjà bien définie sur $]0,+\infty[$?

   Soit $x \in]0,+\infty[$ fixé. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ est continue sur le segment $[x, 2x]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ a bien un sens : $f(x)$ existe.

   Remarquons que également que pour tout $x \in]-\infty, 0[$, $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ est continue sur le segment $[2x, x]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ a bien un sens : $f(x)$ existe également :

   $$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

   De plus, puisque $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$, elle admet une primitive φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle. On a alors :

   $$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \Big[\varphi(t)\Big]_x^{2x} = \varphi(2x) - \varphi(x)$$

   Par somme et composition, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et on a :

   $$\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = 2\varphi'(2x) - \varphi'(x) = 2\frac{e^{2x}}{2x} - \frac{e^x}{x} = \frac{e^{2x} - e^x}{x}$$

2. On a pour tout $x > 0$, $2x > x$, donc $\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{e^{2x}-e^x}{x} > 0$. La fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
   De plus, pour tout $x > 0$, $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est positive sur $[x, 2x]$ donc par positivité de l'intégrale, $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \geqslant 0$. On a donc f croissante sur $]0,+\infty[$ et minorée par 0. Ainsi, par le théorème de la limite monotone, f admet une limite finie ℓ en 0^+ : on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = \ell$.
   Soit $x > 0$, on a :

   $$\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \Big[\ln(t)\Big]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln(2)$$

   La fonction $t \mapsto e^t$ est croissante sur $[x, 2x]$, donc :

   $$\forall t \in [x, 2x], \qquad \frac{e^x}{t} \leqslant \frac{e^t}{t} \leqslant \frac{e^{2x}}{t}$$

   Par positivité de l'intégrale, on en déduit que :

   $$\int_x^{2x} \frac{e^x}{t} dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t} dt$$

ou autrement dit que :

$$e^x \ln(2) \leqslant f(x) \leqslant e^{2x} \ln(2)$$

En passant à la limite dans l'inégalité lorsque $x \to 0^+$, par encadrement, on déduit alors que :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ln(2)$$

3.

$$f : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt & \text{si } x > 0 \\ ln(2) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

La fonction f est à présent continue sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
De plus,

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x} = e^x \frac{e^x - 1}{x} \underset{x \to 0}{\sim} e^x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$$

Donc par le Théorème de Prolongement C^1, f est dérivable en 0, $f'(0) = 1$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

4. On a déjà déterminé l'expression de f' sur $] - \infty, 0[$. Il est facile de vérifier que cette expression est également valable sur $] - \infty, 0[$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f'(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x} \geqslant 0$$

Donc f est croissante sur $] - \infty, 0[$ et croissante sur $]0, +\infty[$, donc puisqu'elle est de plus continue en 0, elle est croissante sur $\mathbb{R}$.

On a déjà dit également que f était positive sur $[0, +\infty[$.
De plus, pour tout $x < 0$, on a :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = -\int_{2x}^{x} \frac{e^t}{t} dt$$

et la fonction $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est négative sur $[2x, x]$, donc d'intégrale négative, et on a donc $f(x) \geqslant 0$.
Ainsi, la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$.

5. Pour nous aider à tracer l'allure de la courbe, regardons les limites de f.
On a pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\frac{e^t}{t} \geqslant 1$, donc pour tout $x > 0$,

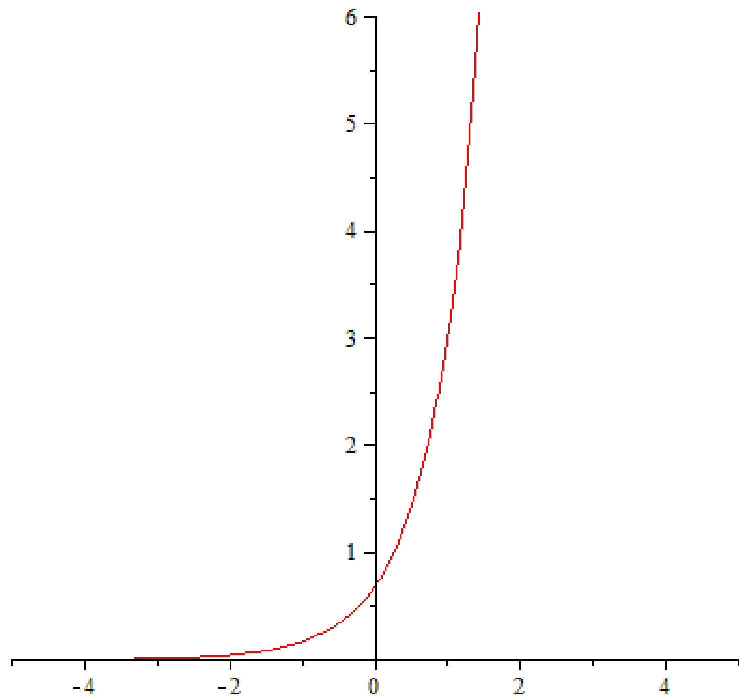
$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \geqslant \int_x^{2x} 1 dt = (2x) - x = x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Par comparaison, on a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
De plus, $\forall t < -1$, $-\frac{1}{t} \leqslant 1$, on a donc :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \int_{2x}^{x} \left(\frac{e^t}{-t} \right) dt \leqslant \int_{2x}^{x} e^t dt = e^x - e^{2x} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par encadrement, (puisque f est positive), on a donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

D'où l'allure de la courbe :



16 On pose $g(x) = (2x-1)\displaystyle\int_{1/2}^{x} \frac{t^4 dt}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction g.
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geqslant 0$.
3. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

1. La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{t^4}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^{x} \varphi(t)dt$ existe.
   La fonction g est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \geqslant 1/2$. Alors $2x-1 \geqslant 0$. De plus, φ est positive sur $[1/2, x]$ donc par positivité de l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^{x} \varphi(t)dt \geqslant 0$. Par produit on a donc bien $g(x) \geqslant 0$.

   Soit $x \leqslant 1/2$. Alors $2x-1 \leqslant 0$. De plus, $\displaystyle\int_{1/2}^{x} \varphi(t)dt = -\int_{x}^{1/2} \varphi(t) \leqslant 0$ (mêmes raisons, puisque φ est positive, puis positivité de l'intégrale $\displaystyle\int_{x}^{1/2} \varphi(t) \geqslant 0$). Ainsi, par produit, on a bien $g(x) \geqslant 0$.
   On a donc bien montré que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geqslant 0$$
3. On a de manière évidente déjà que $g(1/2) = 0$.
   De plus, pour tout $x \neq 1/2$, la fonction φ étant positive sur $[1/2, x]$ (ou $[x, 1/2]$) et non identiquement nulle, l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^{x} \varphi(t)dt$ n'est pas nulle. Donc g ne s'annule qu'en $1/2$.

$\boxed{\textbf{17}}$ Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. f est-elle paire ? impaire ?
3. Démontrer que pour $x > 0$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x}$
4. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}$ est continue sur $[x, 2x]$ (ou $[2x, x]$), donc $f(x)$ est bien défini pour tout réel x :
$$D_f = \mathbb{R}$$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a à l'aide d'un changement de variable $t = -u$:
$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}} = \int_x^{2x} \frac{-du}{\sqrt{(-u)^4+1}} = -\int_x^{2x} \frac{du}{\sqrt{u^4+1}} = -f(x)$$
donc la fonction f est impaire.
3. <u>Soit $x > 0$.</u> On a alors pour tout $t \in [x, 2x]$, $\sqrt{t^4+1} \geqslant \sqrt{t^4} = t^2$.
On a donc :
$$\forall t \in [x, 2x],\ 0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{t^4+1}} \leqslant \frac{1}{t^2}$$
D'où en intégrant :
$$0 \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}} \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t^2} dt = \left[\frac{-1}{t}\right]_x^{2x} = \frac{-1}{2x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$$
On a donc bien :
$$\forall x > 0,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2x}$$
4. Par encadrement, on en déduit alors que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
Puis, par imparité, on en déduit que :
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$