

**1** Montrer que  $F : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$  est une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ .

Il faut montrer que :

- $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$

Déjà, montrons que  $F$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$F(x) \text{ existe} \iff \sqrt{1 + x^2} > -x \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ \text{ou} \\ x \leq 0 \text{ et } 1 + x^2 > x^2 \end{cases} : \text{ tjs vrai}$$

$F$  est donc bien définie sur  $\mathbb{R}$ . De plus, par composition,  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}(x + \sqrt{1+x^2})} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x)$$

$F$  est donc bien une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

2 Déterminer la primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{2(x-1)}$  définie sur  $]1, +\infty[$  qui s'annule en 3.

La primitive de  $x \mapsto \frac{1}{2(x-1)}$  sur  $]1, +\infty[$  qui s'annule en 3 est exactement la fonction  $g$  définie par :

$$\forall x > 1, g(x) = \int_3^x \frac{1}{2(t-1)} dt = \left[ \frac{1}{2} \ln(t-1) \right]_3^x = \frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln(2) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x-1}{2} \right) = \ln \left( \sqrt{\frac{x-1}{2}} \right)$$

**3** Calculer les intégrales suivantes :

1.  $\int_{-2}^4 (x^3 + x - 2)dx$

2.  $\int_3^{11} \sqrt{2x+3}dx$

3.  $\int_2^4 \ln(2t)dt$

4.  $\int_0^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$

5.  $\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt[3]{t^2+2}}dt$

6.  $\int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}dt$

7.  $\int_1^2 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt$

8.  $\int_{-1/3}^0 2^{3x+1}dx$

9.  $\int_1^e \frac{(\ln t)^\alpha}{t}dt$  pour  $\alpha > 0$ .

10.  $\int_0^2 |x^3 - x^2 + x - 1|dx$

11.  $\int_0^5 t|t^2 - 1|dt$

12.  $\int_0^5 \frac{t-1}{|t^2-2t|+1}dt$

13.  $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$

14.  $\int_1^e \ln(t)dt$

15.  $\int_0^1 \text{Arctan}(t)dt.$

16.  $\int_0^1 x \text{Arctan}(x)dx.$

17.  $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x)dx.$

18.  $\int_0^1 (x^2 - x + 1)e^x dx.$

19.  $\int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos^3(x)dx.$

20.  $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)dx.$

1.

$$\int_{-2}^4 (x^3 + x - 2)dx = \left[ \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^4 = (64 + 8 - 8) - (4 + 2 + 4) = \boxed{54}$$

2.

$$\int_3^{11} \sqrt{2x+3}dx = \frac{1}{2} \int_3^{11} 2(2x+3)^{1/2}dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} (2x+3)^{3/2} \right]_3^{11} = \frac{1}{3} (25^{3/2} - 9^{3/2}) = \frac{1}{3} (125 - 27) = \boxed{\frac{98}{3}}$$

ou avec un changement de variable  $t = 2x + 3$  ( $dt = 2dx$ ),

$$\int_3^{11} \sqrt{2x+3}dx = \frac{1}{2} \int_3^{11} \sqrt{2x+3} (2dx) = \frac{1}{2} \int_9^{25} (\sqrt{t}) dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} t^{3/2} \right]_9^{25} = \frac{1}{3} (25^{3/2} - 9^{3/2}) = \boxed{\frac{98}{3}}$$

3.

$$\int_2^4 \ln(2t)dt = \int_2^4 (\ln 2 + \ln t)dt = \left[ \ln(2)t + t \ln(t) - t \right]_2^4 = 4 \ln 2 + 4 \ln 4 - 4 - 2 \ln 2 - 2 \ln 2 + 2 = \boxed{8 \ln(2) - 2}$$

ou avec un changement de variable  $x = 2t$  ( $dx = 2dt$ ),

$$\int_2^4 \ln(2t)dt = \int_4^8 \ln(x) \frac{dx}{2} = \frac{1}{2} \left[ x \ln(x) - x \right]_4^8 = \frac{1}{2} (8 \ln(8) - 8 - 4 \ln(4) + 4) = \boxed{8 \ln(2) - 2}$$

4.

$$\int_0^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx = \left[ \ln(|x^2-x+1|) \right]_0^2 = \ln(3) - \ln(1) = \boxed{\ln(3)}$$

ou avec un changement de variable  $t = x^2 - x + 1$ , on a  $dt = (2x - 1)dx$ , donc :

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2-x+1} (2x-1)dx = \int_1^3 \frac{1}{t}dt = \left[ \ln(|t|) \right]_1^3 = \ln(3) - \ln(1) = \boxed{\ln(3)}$$

5. Sans calcul :

$$\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt[3]{t^2+2}} dt = \boxed{0} \quad \text{puisque la fonction } t \mapsto \frac{t}{\sqrt[3]{t^2+2}} \text{ est impaire sur } [-1, 1]!$$

ou avec calcul :

$$\int_{-1}^1 t (t^2+2)^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{2} (t^2+2)^{\frac{2}{3}} \right]_{-1}^1 = \frac{3}{4} (3^{2/3} - 3^{2/3}) = 0$$

6.

$$\int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}} dt = \frac{2}{5} \int_0^1 \frac{5t^4}{2\sqrt{t^5+3}} dt = \frac{2}{5} \left[ \sqrt{t^5+3} \right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{5}(2-\sqrt{3})}$$

7.

$$\int_1^2 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_1^2 \left( \frac{1}{2\sqrt{t}} \right) e^{\sqrt{t}} dt = 2 \left[ e^{\sqrt{t}} \right]_1^2 = \boxed{2(e^{\sqrt{2}} - e)}$$

8.

$$\int_{-1/3}^0 2^{3x+1} dx = 2 \int_{-1/3}^0 8^x dx = 2 \int_{-1/3}^0 e^{x \ln(8)} dx = 2 \left[ \frac{1}{\ln(8)} e^{x \ln(8)} \right]_{-1/3}^0 = \frac{2}{\ln(8)} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \boxed{\frac{1}{\ln(8)}}.$$

9. Pour  $\alpha > 0$ ,

$$\int_1^e \frac{(\ln t)^\alpha}{t} dt = \left[ \frac{1}{\alpha+1} (\ln t)^{\alpha+1} \right]_1^e = \boxed{\frac{1}{\alpha+1}}$$

10. Cherchons le signe de  $x^3 - x^2 + x - 1$  sur  $[0, 2]$  pour enlever la valeur absolue.

$$x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^2+1)$$

Le signe étant le même que celui de  $x-1$ , on en déduit que, sur  $[1, 2]$   $x^3 - x^2 + x - 1 \geq 0$  et sur  $[0, 1]$ , on a  $x^3 - x^2 + x - 1 \leq 0$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^2 |x^3 - x^2 + x - 1| dx &= \int_0^1 (-x^3 + x^2 - x + 1) dx + \int_1^2 (x^3 - x^2 + x - 1) dx \\ &= \left[ -\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 + \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 = \boxed{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} \int_0^5 t|t^2-1| dt &= \int_0^1 t(1-t^2) dt + \int_1^5 t(t^2-1) dt = \int_0^1 (t-t^3) dt + \int_1^5 (t^3-t) dt \\ &= \left[ \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4} \right]_0^1 + \left[ \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} \right]_1^5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{5^4}{4} - \frac{25}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{625}{4} - \frac{25}{2} = \boxed{\frac{577}{4}} \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} \int_0^5 \frac{t-1}{|t^2-2t|+1} dt &= \int_0^2 \frac{t-1}{(-t^2+2t)+1} dt + \int_2^5 \frac{t-1}{(t^2-2t)+1} dt \\ &= \left[ -\frac{1}{2} \ln(-t^2+2t+1) \right]_0^2 + \left[ \frac{1}{2} \ln(t^2-2t+1) \right]_2^5 \\ &= \frac{1}{2} \ln(16) = \boxed{2 \ln(2)} \end{aligned}$$

13.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \left[ \text{Arctan}(t) \right]_0^1 = \text{Arctan}(1) - \text{Arctan}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

14.

$$\int_1^e \ln(t) dt = \left[ t \ln(t) - t \right]_1^e = (e \ln(e) - e) - (1 \ln(1) - 1) = \boxed{1}$$

On peut aussi faire une intégration par parties, en remarquant qu'on a  $\int_1^e 1 \times \ln(t) dt$ .

En posant  $\left| \begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v(t) = \ln(t) \end{array} \right|$  et  $\left| \begin{array}{l} u(t) = t \\ v'(t) = \frac{1}{t} \end{array} \right|$ ,  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $[1; e]$  et on a :

$$\int_1^e 1 \times \ln(t) dt = \left[ t \ln(t) \right]_1^e - \int_1^e t \times \frac{1}{t} dt = e - \int_1^e 1 dt = e - (e - 1) = \boxed{1}$$

$$15. \int_0^1 \text{Arctan}(t) dt = \int_0^1 1 \times \text{Arctan}(t) dt.$$

On fait une intégration par parties en posant  $\left| \begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v(t) = \text{Arctan}(t) \end{array} \right|$  et  $\left| \begin{array}{l} u(t) = t \\ v'(t) = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right|$ ,  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $[0; 1]$  et on a :

$$\int_0^1 1 \times \text{Arctan}(t) dt = \left[ t \text{Arctan}(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \text{Arctan}(1) - \left[ \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2)}$$

$$16. \int_0^1 x \text{Arctan}(x) dx ?$$

On fait une intégration par parties en posant  $\left| \begin{array}{l} u'(x) = x \\ v(x) = \text{Arctan}(x) \end{array} \right|$  et  $\left| \begin{array}{l} u(x) = \frac{x^2}{2} \\ v'(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right|$ ,  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $[0; 1]$  et on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \times \text{Arctan}(x) dx &= \left[ \frac{x^2}{2} \text{Arctan}(x) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \text{Arctan}(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2+1) - 1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left[ x - \text{Arctan}(x) \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

17. On fait deux intégrations par parties successives dans  $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x) dx$ .

En posant  $\left| \begin{array}{l} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \sin(2x) \end{array} \right.$  et  $\left| \begin{array}{l} u'(x) = 2x \\ v(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) \end{array} \right.$ ,  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $[0; \pi/2]$  et on a :

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x) dx = \left[ -\frac{x^2}{2} \cos(2x) \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} x \cos(2x) dx = \frac{\pi^2}{8} + \int_0^{\pi/2} x \cos(2x) dx$$

En posant à nouveau :  $\left| \begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \cos(2x) \end{array} \right.$  et  $\left| \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) \end{array} \right.$ ,  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $[0; \pi/2]$  et on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x) dx &= \frac{\pi^2}{8} + \left[ \frac{x}{2} \sin(2x) \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(2x) dx \\ &= \frac{\pi^2}{8} + 0 - \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} \cos(2x) \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} (\cos(\pi) - \cos(0)) = \boxed{\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

18. On fait deux intégrations par parties successives dans  $\int_0^1 (x^2 - x + 1)e^x dx$ .

En posant  $\left| \begin{array}{l} u(x) = x^2 - x + 1 \\ v'(x) = e^x \end{array} \right.$  et  $\left| \begin{array}{l} u'(x) = 2x - 1 \\ v(x) = e^x \end{array} \right.$ ,  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $[0; 1]$  et on a :

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1)e^x dx = \left[ (x^2 - x + 1)e^x \right]_0^1 - \int_0^1 (2x - 1)e^x dx = (e - 1) - \int_0^1 (2x - 1)e^x dx$$

En posant à nouveau :  $\left| \begin{array}{l} u(x) = 2x - 1 \\ v'(x) = e^x \end{array} \right.$  et  $\left| \begin{array}{l} u'(x) = 2 \\ v(x) = e^x \end{array} \right.$ ,  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $[0; 1]$  et on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 - x + 1)e^x dx &= (e - 1) - \left( \left[ (2x - 1)e^x \right]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx \right) \\ &= (e - 1) - \left( e - (-1) - \left[ 2e^x \right]_0^1 \right) = -2 + (2e - 2) = \boxed{2e - 4} \end{aligned}$$

19. En reconnaissant directement une forme  $-u'u^3$ , on a :

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos^3(x) dx = \left[ -\frac{1}{4} \cos^4(x) \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{4} \cos^4(\pi/2) + \frac{1}{4} \cos^4(0) = \frac{1}{4}$$

20. On linéarise  $\sin^2(x)$ .

$$\sin^2(x) = \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{-4} = \frac{2 \cos(2x) - 2}{-4} = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}$$

Donc :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(2x)) dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

4 Calculer pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $I_n = \int_1^e t^n \ln t \, dt$  et  $J_n = \int_1^e t^n (\ln t)^2 \, dt$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , calculons  $I_n$  par intégration par parties.

On pose :

$$\forall t \in [1, e], \quad \left| \begin{array}{l} u'(t) = t^n \\ v(t) = \ln(t) \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} u(t) = \frac{1}{n+1} t^{n+1} \\ v'(t) = \frac{1}{t} \end{array} \right.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[ \frac{1}{n+1} t^{n+1} \ln(t) \right]_1^e - \int_1^e \left( \frac{1}{n+1} t^{n+1} \times \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_1^e t^n dt \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \left[ \frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_1^e \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , calculons  $J_n$  par intégration par parties.

On pose :

$$\forall t \in [1, e], \quad \left| \begin{array}{l} u'(t) = t^n \\ v(t) = (\ln(t))^2 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} u(t) = \frac{1}{n+1} t^{n+1} \\ v'(t) = \frac{2 \ln(t)}{t} \end{array} \right.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} J_n &= \left[ \frac{1}{n+1} t^{n+1} (\ln(t))^2 \right]_1^e - \int_1^e \left( \frac{1}{n+1} t^{n+1} \times \frac{2 \ln(t)}{t} \right) dt \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_n \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{2}{n+1} \left( \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{2e^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{2e^{n+1}}{(n+1)^3} - \frac{2}{(n+1)^3} \end{aligned}$$

5 Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_2^3 \frac{1}{1-t^2} dt$$

$$3. \int_1^2 \frac{3t+1}{t(t+1)} dt$$

$$5. \int_1^2 \frac{1}{t(t+1)(t+2)} dt$$

$$2. \int_{-2}^{-1} \frac{1}{t(t-1)} dt$$

$$4. \int_0^1 \frac{1}{(t-2)(t+3)} dt$$

$$6. \int_{-1}^0 \frac{t^2}{t^2+4t-5} dt$$

1.

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{1}{1-t^2} dt &= \int_2^3 \frac{1}{(1-t)(1+t)} dt = \int_2^3 \left( \frac{1/2}{1-t} + \frac{1/2}{1+t} \right) dt \\ &= \left[ -\frac{1}{2} \ln(|1-t|) + \frac{1}{2} \ln(|1+t|) \right]_2^3 = -\frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(4) + \frac{1}{2} \ln(1) - \frac{1}{2} \ln(3) = \boxed{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{2}{3}\right)} \end{aligned}$$

2.

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{t(t-1)} dt = \int_{-2}^{-1} \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \left[ \ln(|t-1|) - \ln(|t|) \right]_{-2}^{-1} = \ln(2) - \ln(1) - \ln(3) + \ln(2) = \boxed{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}$$

3.

$$\int_1^2 \frac{3t+1}{t(t+1)} dt = \int_1^2 \left( \frac{1}{t} + \frac{2}{t+1} \right) dt = \left[ \ln(|t|) + 2 \ln(|t+1|) \right]_1^2 = \ln(2) + 2 \ln(3) - \ln(1) - 2 \ln(2) = \boxed{\ln\left(\frac{9}{2}\right)}$$

4.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(t-2)(t+3)} dt &= \int_0^1 \left( \frac{1/5}{t-2} - \frac{1/5}{t+3} \right) dt = \left[ \frac{1}{5} \ln(|t-2|) - \frac{1}{5} \ln(|t+3|) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{5} \ln(1) - \frac{1}{5} \ln(4) - \frac{1}{5} \ln(2) + \frac{1}{5} \ln(3) = \boxed{\frac{1}{5} \ln\left(\frac{3}{8}\right)} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{t(t+1)(t+2)} dt &= \int_1^2 \left( \frac{1/2}{t} - \frac{1}{t+1} + \frac{1/2}{t+2} \right) dt \\ &= \left[ \frac{1}{2} \ln(|t|) - \ln(|t+1|) + \frac{1}{2} \ln(|t+2|) \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \ln(2) - \ln(3) + \frac{1}{2} \ln(4) - \frac{1}{2} \ln(1) + \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(3) = \boxed{\frac{5}{2} \ln(2) - \frac{3}{2} \ln(3)} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{t^2}{t^2+4t-5} dt &= \int_{-1}^0 \left( \frac{(t^2+4t-5) - 4t+5}{t^2+4t-5} \right) dt \\ &= \int_{-1}^0 \left( 1 - \frac{4t-5}{(t-1)(t+5)} \right) dt = \int_{-1}^0 \left( 1 - \frac{-1/6}{t-1} - \frac{25/6}{t+5} \right) dt \\ &= \left[ t + \frac{1}{6} \ln(|t-1|) - \frac{25}{6} \ln(|t+5|) \right]_{-1}^0 \\ &= -\frac{25}{6} \ln(5) + 1 - \frac{1}{6} \ln(2) + \frac{25}{6} \ln(4) = \boxed{1 + \frac{49}{6} \ln(2) - \frac{25}{6} \ln(5)} \end{aligned}$$



6 Calculer les intégrales suivantes avec le changement de variable indiqué.

$$1. \int_{\ln 2}^{\ln 4} \sqrt{e^x - 1} dx \quad (u = \sqrt{e^x - 1})$$

$$2. \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt \quad (x = t + 1)$$

$$3. \int_1^{4/3} \frac{t}{(3t-2)^5} dt \quad (u = 3t - 2)$$

$$4. \int_1^2 \frac{e^{2t}}{1 - e^t} dt \quad (t = \ln(x))$$

$$5. \int_0^1 \frac{\sqrt{t} - t}{\sqrt{t} + 1} dt \quad (x = \sqrt{t})$$

$$6. \int_0^1 e^{\sqrt{t}} dt \quad (t = x^2)$$

$$7. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin(t)} \quad (u = \cos(t))$$

$$8. \int_0^{\pi/3} \frac{dt}{\cos(t)} \quad (x = \sin(t))$$

$$9. \int_1^2 \frac{1}{t(t^3 + 1)} dt \quad (u = t^3)$$

$$10. \int_1^3 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt \quad (t = x^2)$$

$$11. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x) \sin(x)} dx \quad (u = \sin(x))$$

$$12. \int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x \cos(x^2) dx \quad (x = \sqrt{t})$$

1. On souhaite faire le changement de variable  $u = \sqrt{e^x - 1}$ .

Notons pour tout  $x \in [\ln(2), \ln(4)]$ ,  $\varphi(x) = \sqrt{e^x - 1}$ .

La fonction  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[\ln(2), \ln(4)]$  et  $\forall x \in [\ln(2), \ln(4)]$ ,  $\varphi'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$ .

On a donc :

$$u = \sqrt{e^x - 1} \quad \text{avec} \quad du = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx$$

et remarquons que :  $u = \sqrt{e^x - 1} \iff e^x - 1 = u^2 \iff e^x = u^2 + 1$

On a alors :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\ln 2}^{\ln 4} \sqrt{e^x - 1} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{2(\sqrt{e^x - 1})^2}{e^x} \times \left( \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx \right) \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{2\varphi^2(x)}{\varphi^2(x) + 1} \varphi'(x) dx \\ &= \int_{\varphi(\ln 2)}^{\varphi(\ln 4)} \frac{2u^2}{u^2 + 1} du \\ &= 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{u^2 + 1 - 1}{u^2 + 1} du \\ &= 2 \left[ u - \text{Arctan}(u) \right]_1^{\sqrt{3}} \\ &= 2 \left( \sqrt{3} - \text{Arctan}(\sqrt{3}) \right) - 2(1 - \text{Arctan}(1)) \\ &= \boxed{2\sqrt{3} - 2\frac{\pi}{3} - 2 + 2\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

2. On fait le changement de variable  $x = t + 1$  ( $dx = dt$ ), on a donc :

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt = \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \left( \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} - 2\sqrt{x} \right]_1^2 = \frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1) - 2(\sqrt{2} - 1)$$

3. On fait le changement de variable  $u = 3t - 2$  ( $du = 3dt$ ).

$$\int_1^{4/3} \frac{t}{(3t-2)^5} dt = \int_1^2 \frac{\frac{u+2}{3}}{u^5} \left(\frac{1}{3} du\right) = \frac{1}{9} \int_1^2 \left(\frac{1}{u^4} + \frac{2}{u^5}\right) du = \frac{1}{9} \left[-\frac{1}{3u^3} - \frac{1}{2u^4}\right]_1^2 = \frac{1}{9} \left(\frac{7}{24} + \frac{15}{32}\right)$$

4. Remarquons que cette fois, le changement de variable est donné en sens inverse. On veut poser  $t = \ln(x)$  avec  $dt = \frac{1}{x} dx$ .

Remarquons que  $t = 1 \Leftrightarrow x = e$  et  $t = 2 \Leftrightarrow x = e^2$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{e^{2t}}{1-e^t} dt &= \int_e^{e^2} \frac{e^{2\ln x}}{1-e^{\ln x}} \left(\frac{1}{x} dx\right) = \int_e^{e^2} \frac{x^2}{x(1-x)} dx = \int_e^{e^2} \frac{x}{1-x} dx = \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{1-x} - 1\right) dx \\ &= \left[-\ln(|1-x|) - x\right]_e^{e^2} = -\ln(e^2-1) - e^2 + \ln(e-1) + e = e - e^2 - \ln(e+1) \end{aligned}$$

5. On veut calculer  $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}-t}{\sqrt{t}+1} dt$  avec le changement de variable  $x = \sqrt{t}$ .

Mais il y a un problème : la fonction  $t \mapsto \sqrt{t}$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  ... On ne peut pas faire apparaître  $\frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ , lorsque  $t \in [0, 1]$ .

Il suffit d'écrire le changement de variable à l'inverse et d'écrire  $\boxed{t = x^2}$  (et  $dt = 2x dx$ ), puisque la fonction  $x \mapsto x^2$  est, elle, de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sqrt{t}-t}{\sqrt{t}+1} dt &= \int_0^1 \frac{x-x^2}{x+1} (2x dx) = 2 \int_0^1 \frac{x^2-x^3}{x+1} dx = 2 \int_0^1 \frac{(x+1)(-x^2+2x-2)+2}{x+1} dx \\ &= 2 \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 - 2x + 2 \ln(x+1)\right]_0^1 = 2 \left(-\frac{4}{3} + 2 \ln(2)\right) \end{aligned}$$

6. On pose  $t = x^2$  ( $dt = 2x dx$ ), on a alors :

$$\int_0^1 e^{\sqrt{t}} dt = \int_0^1 e^x (2x dx) = 2 \int_0^1 x e^x dx = 2 \left[(x-1)e^x\right]_0^1 = \boxed{2}$$

7. On pose  $u = \cos(t)$ , donc  $du = (-\sin(t))dt$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin(t)} &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{-1}{\sin^2(t)} (-\sin(t) dt) \\ &= - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{1-\cos^2(t)} (-\sin(t) dt) \\ &= - \int_{\sqrt{2}/2}^0 \frac{1}{1-u^2} du \\ &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\frac{1/2}{1-u} + \frac{1/2}{1+u}\right) du \\ &= \frac{1}{2} \left[-\ln(1-u) + \ln(1+u)\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

8. On pose  $x = \sin(t)$ , donc  $dx = (\cos(t))dt$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} \frac{dt}{\cos(t)} &= \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2(t)} (\cos(t)dt) \\ &= \int_0^{\pi/3} \frac{1}{(1 - \sin^2(t))} \cos(t)dt \\ &= \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{1 - x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}/2} \left( \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\ln(1 - x) + \ln(1 + x) \right]_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

9. On pose  $u = t^3$ , donc  $du = 3t^2 dt$ .

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{t(t^3 + 1)} dt &= \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{1}{t^3(t^3 + 1)} (3t^2 dt) \\ &= \frac{1}{3} \int_1^8 \frac{1}{u(u + 1)} du \\ &= \frac{1}{3} \int_1^8 \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{u + 1} \right) du \\ &= \frac{1}{3} \left[ \ln(u) - \ln(u + 1) \right]_1^8 \\ &= \frac{1}{3} (\ln(8) - \ln(9) + \ln(2)) = \frac{1}{3} \ln \left( \frac{16}{9} \right) = \frac{1}{6} \ln \left( \frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

10. On veut poser  $t = x^2$ , donc  $dt = 2x dx$ .

Remarquons que :

$$t = 1 \iff x = 1 \quad \text{et} \quad t = 3 \iff x = \sqrt{3}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\ln(x^2)}{\sqrt{x^2}} 2x dx \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} 4 \ln(x) dx \\ &= 4 \left[ x \ln(x) - x \right]_1^{\sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{3} \ln(3) - 4\sqrt{3} + 4 \end{aligned}$$

11. On veut calculer  $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)\sin(x)} dx$  avec le changement de variable  $u = \sin(x)$ .

Remarquons que  $u = \sin(x)$  donne  $du = \cos(x)dx$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)\sin(x)} dx &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos(x)dx}{\cos^2(x)\sin(x)} dx \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{(1-\sin^2(x))\sin(x)} \cos(x)dx \\ &= \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{(1-u^2)u} du \\ &= \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \left( \frac{1/2}{1-u} - \frac{1/2}{1+u} + \frac{1}{u} \right) du \\ &= \left[ -\frac{1}{2} \ln(1-u) - \frac{1}{2} \ln(1+u) + \ln(u) \right]_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \\ &= \left[ \ln \left( \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right) \right]_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \\ &= \ln(\sqrt{3}) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \ln(3) \end{aligned}$$

12. Calculons  $\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x \cos(x^2) dx$  avec le changement de variable  $x = \sqrt{t}$

On pose  $x = \sqrt{t}$  donc  $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ . On a donc :

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x \cos(x^2) dx = \int_{\pi}^{4\pi} 2\sqrt{t} \cos(t) \left( \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \right) = \int_{\pi}^{4\pi} \cos(t) dt = \left[ \sin(t) \right]_{\pi}^{4\pi} = \sin(4\pi) - \sin(\pi) = 0$$

7 On note pour  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $I(p, q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$ .

1. Calculer  $I(0, q)$  et  $I(p, 0)$  pour  $p, q \in \mathbb{N}$ .
2. Pour  $p, q \in \mathbb{N}$ , exprimer  $I(p+1, q)$  en fonction de  $I(p, q+1)$ .
3. Calculer  $I(p, q)$  en fonction de  $p$  et  $q$ .

1.

$$I(0, q) = \int_0^1 (1-t)^q dt = \left[ -\frac{(1-t)^{q+1}}{q+1} \right]_0^1 = \frac{1}{q+1}$$

et

$$I(p, 0) = \int_0^1 t^p dt = \left[ \frac{t^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$$

2. Pour  $p, q \in \mathbb{N}$ , on a :  $I(p+1, q) = \int_0^1 t^{p+1}(1-t)^q dt$ .

En posant  $\begin{cases} u(t) = t^{p+1} \\ v'(t) = (1-t)^q \end{cases}$  et  $\begin{cases} u'(t) = (p+1)t^p \\ v(t) = \frac{-(1-t)^{q+1}}{q+1} \end{cases}$ , on a :

$$I(p+1, q) = \left[ -\frac{t^{p+1}(1-t)^{q+1}}{q+1} \right]_0^1 + \frac{p+1}{q+1} \int_0^1 t^p(1-t)^{q+1} dt = 0 + \frac{p+1}{q+1} I(p, q+1)$$

3. On a donc, en itérant plusieurs fois la relation précédente, pour tout  $p, q \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} I(p, q) &= \frac{p}{q+1} I(p-1, q+1) \\ &= \frac{p}{q+1} \times \frac{p-1}{q+2} I(p-2, q+2) \\ &= \frac{p(p-1)(p-2)}{(q+1)(q+2)(q+3)} I(p-3, q+3) \\ &= \vdots \\ &= \frac{p(p-1)(p-2) \cdots 1}{(q+1)(q+2)(q+3) \cdots (q+p)} I(0, q+p) \\ &= \frac{p!}{(q+1)(q+2) \cdots (q+p)} \times \frac{1}{(q+p+1)} \\ &= \frac{p!q!}{(p+q+1)!} \end{aligned}$$

8 On note pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$ .

1. La suite  $(I_n)$  est-elle monotone?
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq I_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$
3. Montrer que pour tout  $n \geq 0$ ,  $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$ .
4. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x dx - \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \left( \frac{1-x}{n+1} - 1 \right) dx$$

Or, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $\frac{(1-x)^n}{n!} e^x \left( \frac{1-x}{n+1} - 1 \right) \leq 0$ , donc par positivité de l'intégrale ( $0 < 1$ ), on a :

$$I_{n+1} - I_n \leq 0$$

La suite  $(I_n)$  est donc décroissante.

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\forall x \in [0, 1], 0 \leq \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \leq \frac{(1-x)^n}{n!} e$$

Donc par positivité de l'intégrale, ( $0 < 1$ ),

$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!} \int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{e}{n!} \int_0^1 t^n dt = \frac{e}{n!} \times \frac{1}{n+1} = \frac{e}{(n+1)!}$$

3. On a  $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$ .

Notons pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $\left| \begin{array}{l} u'(x) = (1-x)^n \\ v(x) = \frac{e^x}{n!} \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} u(x) = -\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1} \\ v'(x) = \frac{e^x}{n!} \end{array} \right|$ .

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont bien  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  donc on a par IPP :

$$I_n = \left[ -\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1} \frac{e^x}{n!} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x dx = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

4. On a donc :

$$\forall k \geq 0, I_k - I_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}$$

En sommant cette relation pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on a donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (I_k - I_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!}$$

autrement dit (somme télescopique)

$$I_0 - I_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \implies I_n = I_0 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \int_0^1 e^x dx - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = e - 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \boxed{e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}}$$

9 On note pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$ .

1. Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante. Est-elle minorée ?
2. Montrer que sur  $[1, e]$ ,  $0 \leq \ln(x) \leq \frac{x}{e}$ . En déduire un encadrement de  $I_n$ .
3. Montrer que :  $\forall n \geq 0$ ,  $I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$ .

1.

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^{n+1} dx - \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx = \int_1^e x^2 (\ln x)^n (\ln(x) - 1) dx$$

Or,  $\forall x \in [1, e]$ ,  $x^2 (\ln x)^n (\ln(x) - 1) \leq 0$ , donc par positivité ( $1 < e$ ),  $\int_1^e x^2 (\ln x)^n (\ln(x) - 1) dx \leq 0$ .

On a donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $I_{n+1} - I_n \leq 0$ . La suite  $(I_n)$  est donc décroissante.

De plus,  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [1, e]$ ,  $x^2 (\ln x)^n \geq 0$ , donc  $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$ . La suite  $(I_n)$  est donc minorée (par 0).

2. Puisque  $\ln$  est croissante, on a  $\forall x \in [1, e]$ ,  $\ln(x) \geq \ln(1) = 0$ .

Posons pour tout  $x \in [1, e]$ ,  $\varphi(x) = \ln(x) - \frac{x}{e}$ .

La fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $[1, e]$  et on a :  $\forall x \in [1, e]$ ,  $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} \geq 0$ .

La fonction  $\varphi$  est donc croissante, et comme  $\varphi(e) = 0$ , on a  $\forall x \in [1, e]$ ,  $\varphi(x) \leq 0$ . Finalement :

$$\forall x \in [1, e], 0 \leq \ln(x) \leq \frac{x}{e}$$

D'où :

$$\forall x \in [1, e], 0 \leq x^2 (\ln x)^n \leq x^2 \left(\frac{x}{e}\right)^n$$

Par positivité ( $1 < e$ ), on en déduit que :  $0 \leq \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx \leq \frac{1}{e^n} \int_1^e x^{n+2} dx$ ,

autrement dit :

$$0 \leq I_n \leq \frac{e^{n+3} - 1}{(n+3)e^n} \leq \frac{e^{n+3}}{(n+3)e^n} = \frac{e^3}{n+3}$$

D'où :

$$\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{e^3}{n+3}}$$

3. Soit  $n \geq 0$ . On a  $I_{n+1} = \int_1^e x^2 (\ln x)^{n+1} dx$ .

Notons pour tout  $x \in [1, e]$ ,  $\left| \begin{array}{l} u'(x) = x^2 \\ v(x) = (\ln x)^{n+1} \end{array} \right|$  et  $\left| \begin{array}{l} u(x) = \frac{x^3}{3} \\ v'(x) = (n+1) \frac{1}{x} (\ln x)^n \end{array} \right|$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont bien  $\mathcal{C}^1$  sur  $[1, e]$  donc on peut intégrer par parties :

$$I_{n+1} = \left[ \frac{x^3}{3} \ln(x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} (n+1) \frac{1}{x} (\ln x)^n dx = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$$

**10** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$ .

- Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .
- Déterminer une relation entre  $I_n$  et  $I_{n-1}$  pour  $n \geq 1$ .  
En déduire la valeur de  $I_n$  pour tout  $n \geq 1$ .

1.

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \int_0^1 (1-x)^{1/2} dx = \left[ -\frac{(1-x)^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 x \sqrt{1-x} dx = \int_0^1 (x-1+1) \sqrt{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-x} dx - \int_0^1 (1-x)^{3/2} dx \\ &= I_0 - \left[ -\frac{(1-x)^{5/2}}{5/2} \right]_0^1 = I_0 - \frac{2}{5} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

2. Pour  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx = \int_0^1 x^{n-1} (1 - (1-x)) \sqrt{1-x} dx = \int_0^1 x^{n-1} \sqrt{1-x} dx - \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{3/2} dx \\ &= I_{n-1} - \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{3/2} dx \end{aligned}$$

On fait une IPP dans l'intégrale obtenue.

Posons  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $u'(x) = x^{n-1}$ ,  $v(x) = (1-x)^{3/2}$ ,  $u(x) = \frac{1}{n} x^n$  et  $v'(x) = -\frac{3}{2} \sqrt{1-x}$ . On a alors :

$$I_n = I_{n-1} - \left[ \frac{1}{n} x^n (1-x)^{3/2} \right]_0^1 - \frac{3}{2n} \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$$

D'où :

$$I_n = I_{n-1} - \frac{3}{2n} I_n \implies \left( 1 + \frac{3}{2n} \right) I_n = I_{n-1} \implies \boxed{I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{5} I_0 \\ I_2 &= \frac{4}{7} I_1 = \frac{4 \times 2}{7 \times 5} I_0 \\ I_3 &= \frac{6}{9} I_2 = \frac{6 \times 4 \times 2}{9 \times 7 \times 5} I_0 \end{aligned}$$

par une récurrence immédiate :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{(2n)(2n-2)(2n-4) \cdots 4 \times 2}{(2n+3)(2n+1)(2n-1) \cdots 7 \times 5} I_0 \\ &= \frac{(2n+2)(2n)^2(2n-2)^2(2n-4)^2 \cdots 4^2 \times 2^2}{(2n+3)!} \times 2 \\ &= \boxed{(4n+4) \frac{(2^n n!)^2}{(2n+3)!}} \end{aligned}$$



**11** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$ .

1. Etablir une relation entre  $I_n$  et  $I_{n+1}$ . En déduire la valeur de  $I_n$ .

2. Calculer alors  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

1.

$$I_{n+1} = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt = \int_0^1 (1-t^2)(1-t^2)^n dt = \int_0^1 (1-t^2)^n dt - \int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt = I_n - \int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt$$

$$\text{On pose } \forall t \in [0, 1], \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = t(1-t^2)^n \end{cases}, \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \frac{1}{2(n+1)}(1-t^2)^{n+1} \end{cases}$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  étant bien de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$

$$I_{n+1} = I_n - \left[ \frac{1}{2(n+1)} t(1-t^2)^{n+1} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2(n+1)} (1-t^2)^{n+1} dt = I_n + \frac{1}{2(n+1)} I_{n+1}$$

On a donc finalement :

$$I_{n+1} = I_n + \frac{1}{2n+2} I_{n+1} \implies \boxed{I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n}$$

On a alors en utilisant la relation de récurrence :

$$I_1 = \frac{2}{3} I_0, \quad \text{puis} \quad I_2 = \frac{4}{5} I_1 = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} I_0$$

puis par une récurrence immédiate, on a :

$$I_n = \frac{(2n)(2n-2)(2n-4) \times \dots \times 4 \times 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3) \times \dots \times 5 \times 3} I_0$$

Puisque  $I_0 = \int_0^1 1 dt = 1$ , on donc :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 0, I_n &= \frac{(2n)(2n-2)(2n-4) \times \dots \times 4 \times 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3) \times \dots \times 5 \times 3} \\ &= \frac{((2n)(2n-2)(2n-4) \times \dots \times 4 \times 2)^2}{(2n+1) \times (2n)!} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \boxed{\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}} \end{aligned}$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 t^{2k} dt = \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-t^2)^k \right) dt \\ &= \int_0^1 (1-t^2)^n dt = I_n \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{S_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}}$$

**12** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq \ln(2)$ .
2. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}$ .
3. En déduire un encadrement de  $u_n$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a :

$$\forall t \in [0, 1], \frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{1+t}$$

D'où par positivité de l'intégrale ( $0 < 1$ )

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt$$

autrement dit :

$$u_n \leq \ln(2)$$

2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\ln(2) - u_n = \int_0^1 \left( \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} \right) dt = \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

3. On en déduit donc que :

$$\ln(2) - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \ln(2)$$

**13** Soit  $F$  la fonction définie par  $F(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$

- Déterminer le domaine de définition de la fonction  $F$  et montrer que  $F$  est dérivable sur son domaine de définition. Calculer sa dérivée.
- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $F(x) \leq 0$ .
- Montrer que  $F$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, |F(x)| \leq e|x|$ .
- Etudier la parité de la fonction  $F$ .

- Soit  $x \in \mathbb{R}$  fixé. La fonction  $t \mapsto e^{\cos(t)}$  étant continue sur  $\mathbb{R}$  (par composition), elle l'est également sur l'intervalle  $[0, x]$  (ou  $[x, 0]$ ). Donc l'intégrale  $\int_0^x e^{\cos(t)} dt$  est bien définie et  $F(x)$  existe :  $D_f = \mathbb{R}$ .

La fonction  $t \mapsto e^{\cos(t)}$  étant continue sur  $\mathbb{R}$ , elle admet une primitive  $g$  sur  $\mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x e^{\cos(t)} dt = \left[ g(t) \right]_0^x = g(x) - g(0)$$

Ainsi, par somme d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et d'une fonction constante,  $F$  est bien dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = g'(x) = e^{\cos(x)}$$

(on pouvait également reconnaître directement pour  $F$  l'unique primitive de  $t \mapsto e^{\cos(t)}$  qui s'annule en 0).

- Soit  $x > 0$ . Alors, la fonction  $t \mapsto e^{\cos(t)}$  étant strictement positive et continue sur l'intervalle  $[0, x]$ , par positivité de l'intégrale, les bornes sont dans le bon ordre, on obtient  $\int_0^x e^{\cos(t)} dt > 0$ .

Soit  $x \leq 0$ . Alors :  $F(x) = \int_0^x e^{\cos(t)} dt = -\int_x^0 e^{\cos(t)} dt$ . La fonction  $t \mapsto e^{\cos(t)}$  étant positive sur l'intervalle  $[x, 0]$ , par positivité de l'intégrale, on obtient  $\int_x^0 e^{\cos(t)} dt \geq 0$  et donc  $F(x) \leq 0$ .

On a donc montré que :  $F(x) \leq 0 \iff x \leq 0$ .

- La fonction  $F$  est dérivable d'après la question 1 et  $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = e^{\cos(x)} > 0$ , donc la fonction  $F$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

- Si  $x \geq 0$ ,  $\left| \int_0^x e^{\cos(t)} dt \right| \leq \int_0^x e^{\cos(t)} dt \leq \int_0^x e^1 dt = xe$ .

Si  $x \leq 0$ ,  $\left| \int_0^x e^{\cos(t)} dt \right| = \int_x^0 e^{\cos(t)} dt \leq \int_x^0 e^1 dt = -xe$ .

Finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, |F(x)| \leq e|x|$$

- Soit  $x \in \mathbb{R}$ . En utilisant un changement de variable  $u = -t$  on obtient :

$$F(-x) = \int_0^{-x} e^{\cos t} dt = \int_0^x e^{\cos(-u)} (-du) = -\int_0^x e^{\cos(u)} du = -F(x)$$

La fonction  $F$  est donc impaire.

**14** Pour chacune des fonctions suivantes, donner :

- le domaine de définition de  $f$
- le signe de  $f$  sur le domaine de définition,
- la parité eventuelle
- la dérivée de  $f$  si elle existe

$$1. f : x \mapsto \int_0^x \frac{t}{e^t - e^{-t}} dt$$

$$4. f : x \mapsto \int_1^x |t|^3 dt$$

$$7. f : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1 - t^4}$$

$$2. f : x \mapsto \int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt$$

$$5. f : x \mapsto \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{t^4 + 1} dt$$

$$8. f : x \mapsto \int_1^x e^{-t^2} dt$$

$$3. f : x \mapsto \int_0^x |t| dt$$

$$6. f : x \mapsto \int_x^0 \sqrt{1 + t^2} dt$$

$$9. f : x \mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$$

1.

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{e^t - e^{-t}} dt$$

La fonction  $t \mapsto \frac{t}{e^t - e^{-t}}$  est définition et continue sur  $\mathbb{R}^*$ . Ainsi, quelque soit la valeur de  $x$ , la fonction  $t \mapsto \frac{t}{e^t - e^{-t}}$  ne sera jamais continue sur  $[0, x]$  (ou  $[x, 0]$ ), donc l'intégrale  $\int_0^x \frac{t}{e^t - e^{-t}} dt$  n'est pas bien définition.

Ainsi  $f$  n'est pas définition.

2.

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt$$

La fonction  $t \mapsto \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'intégrale  $\int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt$  est bien définition, donc  $f$  est définition sur  $\mathbb{R}$ .

Pour  $x \geq 0$ ,

$$\forall t \in [0, x], \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \geq 0$$

donc par positivité ( $0 \leq x$ ),

$$\int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt \geq 0$$

Ainsi,  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}^+$ .

Pour  $x \leq 0$ ,

$$\forall t \in [x, 0], \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \leq 0$$

donc par positivité ( $x \leq 0$ ) (bornes dans le mauvais sens),

$$\int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt \geq 0$$

Ainsi,  $f$  est positive aussi sur  $\mathbb{R}^-$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(-x) = \int_0^{-x} \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt \stackrel{u=-t}{=} \int_0^x \frac{e^{-u} - e^u}{e^{-u} + e^u} (-du) = \int_0^x \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} du = f(x)$$

ainsi,  $f$  est paire.

Enfin,  $f$  est par définition la primitive de  $t \mapsto \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$  qui s'annule en 0, donc  $f$  est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

3.

$$f(x) = \int_0^x |t| dt$$

La fonction  $t \mapsto |t|$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , ainsi, pour tout réel  $x$ , l'intégrale  $\int_0^x |t| dt$  existe bien.

La fonction  $f$  est donc bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

De plus, la fonction  $t \mapsto |t|$  est toujours positive, donc l'intégrale est positive si et seulement si les bornes sont dans le bon sens :

$$\forall x \geq 0, f(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \leq 0, f(x) \leq 0$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(-x) = \int_0^{-x} |t| dt \stackrel{u=-t}{=} \int_0^x |-u| (-du) = - \int_0^x |u| du = -f(x)$$

Ainsi,  $f$  est impaire.

Enfin,  $f$  est par définition la primitive de  $t \mapsto |t|$  qui s'annule en 0. Elle est donc dérivable et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = |x|$$

4.

$$f(x) = \int_1^x |t|^3 dt$$

La fonction  $t \mapsto |t|^3$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'intégrale  $\int_1^x |t|^3 dt$  a bien un sens.

Ainsi,  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

De plus, la fonction  $t \mapsto |t|^3$  est toujours positive, donc l'intégrale est positive si et seulement si les bornes sont dans le bon sens. On a donc :

$$\forall x \geq 1, f(x) \geq 0, \quad \forall x \leq 1, f(x) \leq 0$$

La fonction  $f$  ne peut pas être paire (vu son signe) et n'est pas impaire puisque  $f(0) \neq 0$ . Aucune parité donc.

Enfin,  $f$  est exactement la primitive de  $t \mapsto |t|^3$  qui s'annule en 1, donc par définition  $f$  est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = |x|^3$$

5.

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{t^4 + 1} dt$$

La fonction  $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{t^4 + 1}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

Ainsi,  $f(x)$  existe si et seulement si  $x \geq 0$  car c'est le seul cas possible où  $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{t^4 + 1}$  soit continue sur  $[0, x]$ .

$$D_f = [0, +\infty[$$

De plus, pour tout  $t \geq 0$ ,  $\frac{\sqrt{t}}{t^4 + 1} \geq 0$ , les bornes étant dans le bon sens, on a donc que :

$$\forall x \geq 0, f(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{t^4 + 1} dt \geq 0$$

$f$  n'étant pas définie sur  $] -\infty, 0[$ , elle ne peut être ni paire ni impaire.

Enfin, par définition,  $f$  est la primitive de  $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{t^4 + 1}$  qui s'annule en 0, elle est donc dérivable sur  $[0, +\infty[$  et :

$$\forall x \geq 0, f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^4 + 1}$$

6.

$$f(x) = \int_x^0 \sqrt{1 + t^2} dt$$

La fonction  $t \mapsto \sqrt{1 + t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Donc pour tout réel  $x$ , elle est continue sur  $[0, x]$  ou  $[x, 0]$ , l'intégrale a donc toujours un sens :

$$D_f = \mathbb{R}$$

De plus,  $t \mapsto \sqrt{1 + t^2}$  est toujours positive, donc l'intégrale est positive si et seulement si les bornes sont dans le bon sens :

$$\forall x \leq 0, f(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \geq 0, f(x) \leq 0$$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \int_{-x}^0 \sqrt{1 + t^2} dt \stackrel{u=-t}{=} \int_x^0 \sqrt{1 + (-u)^2} (-du) = - \int_x^0 \sqrt{1 + u^2} du = -f(x)$$

donc  $f$  est impaire.

Enfin, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = - \int_0^x \sqrt{1 + t^2} dt = -\varphi(x)$$

où  $\varphi$  est la primitive de  $t \mapsto \sqrt{1 + t^2}$  qui s'annule en 0, donc  $f$  est bien dérivable et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\varphi'(x) = -\sqrt{1 + x^2}$$

7.

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t^4}$$

La fonction  $t \mapsto \frac{1}{1-t^4}$  est définie et continue sur  $] -\infty, -1[ \cup ] -1, 1[ \cup ] 1, +\infty[$ .

L'intégrale  $\int_0^x \frac{dt}{1-t^4}$  a bien un sens lorsque  $t \mapsto \frac{1}{1-t^4}$  est continue sur le segment  $[0, x]$  (ou  $[x, 0]$ ), donc cela impose que  $x \in ] -1, 1[$  (car si  $x \notin ] -1, 1[$  la fonction sous l'intégrale ne serait pas continue sur tout le segment  $[0, x]$  ou  $[x, 0]$ ),

$$D_f = ] -1, 1[$$

Pour tout  $t \in ] -1, 1[$ ,  $\frac{1}{1-t^4} \geq 0$ , donc l'intégrale définissant  $f(x)$  est positive si et seulement si les bornes sont dans le bon sens :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad f(x) \geq 0, \quad \text{et} \quad \forall x \in ] -1, 0], \quad f(x) \leq 0$$

On a :

$$\forall x \in ] -1, 1[, \quad f(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{1-t^4} dt \stackrel{u=-t}{=} \int_0^x \frac{1}{1-(-u)^4} (-du) = - \int_0^x \frac{1}{1-u^4} du = -f(x)$$

donc  $f$  est impaire.

Enfin,  $f$  est par définition la primitive sur  $] -1, 1[$  de  $t \mapsto \frac{1}{1-t^4}$  qui s'annule en 0, elle est donc dérivable sur  $] -1, 1[$  et :

$$\forall x \in ] -1, 1[, \quad f'(x) = \frac{1}{1-x^4}$$

8.

$$f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$$

La fonction  $t \mapsto e^{-t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc pour tout réel  $x$  l'intégrale  $\int_1^x e^{-t^2} dt$  a bien un sens.

$$D_f = \mathbb{R}$$

La fonction  $t \mapsto e^{-t^2}$  étant toujours positive, l'intégrale est positive si et seulement si ses bornes sont dans le bon sens.

$$\forall x \geq 1, \quad f(x) \geq 0, \quad \text{et} \quad \forall x \leq 1, \quad f(x) \leq 0$$

Vu le signe,  $f$  ne peut pas être paire, et comme  $f(0) \neq 0$ ,  $f$  ne peut pas être impaire. Aucune parité. Enfin,  $f$  est par définition la primitive de  $t \mapsto e^{-t^2}$  qui s'annule en 1, donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^{-x^2}$$

9.

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$$

La fonction  $t \mapsto e^{-t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto e^{-t^2}$  est continue sur  $[x, 2x]$  (ou sur  $[2x, x]$ ), donc l'intégrale est toujours bien définie.

$$D_f = \mathbb{R}$$

La fonction  $t \mapsto e^{-t^2}$  est toujours positive, donc  $f(x)$  est positif si et seulement si les bornes sont dans le bon sens

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \leq 0, \quad f(x) \leq 0$$

Pour tout réel  $x$ ,

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} e^{-t^2} dt \stackrel{u=-t}{=} \int_x^{2x} e^{-(-u)^2} (-du) = - \int_x^{2x} e^{-u^2} du = -f(x)$$

Ainsi,  $f$  est impaire.

Notons  $\varphi$  une primitive sur  $\mathbb{R}$  de  $t \mapsto e^{-t^2}$  (la fonction  $t \mapsto e^{-t^2}$  étant continue, elle admet bien au moins une primitive), on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$$

Ainsi,  $f$  est dérivable en tant que somme de composées de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2\varphi'(2x) - \varphi'(x) = 2e^{-(2x)^2} - e^{-x^2} = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$$



**15** Soit  $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ .

1. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  et calculer sa dérivée.
2. En remarquant que  $\ln(2) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t}$  pour tout réel  $x > 0$ , montrer que  $f$  admet  $\ln(2)$  pour limite en 0.
3. Montrer que  $f$  peut se prolonger en une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$ .
4.  tudier les variations de  $f$ .  tudier le signe de  $f(x)$  sur le domaine de définition de  $f$ .
5. Tracer l'allure de la courbe de  $f$ .

1. La fonction  $f$  est-elle déjà bien définie sur  $]0, +\infty[$  ?

Soit  $x \in ]0, +\infty[$  fixé. La fonction  $t \mapsto \frac{e^t}{t}$  est continue sur le segment  $[x, 2x]$  donc l'intégrale  $\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$  a bien un sens :  $f(x)$  existe.

Remarquons que également que pour tout  $x \in ]-\infty, 0[$ ,  $t \mapsto \frac{e^t}{t}$  est continue sur le segment  $[2x, x]$  donc l'intégrale  $\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$  a bien un sens :  $f(x)$  existe également :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

De plus, puisque  $t \mapsto \frac{e^t}{t}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , elle admet une primitive  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur cet intervalle. On a alors :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \left[ \varphi(t) \right]_x^{2x} = \varphi(2x) - \varphi(x)$$

Par somme et composition,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  et on a :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, f'(x) = 2\varphi'(2x) - \varphi'(x) = 2\frac{e^{2x}}{2x} - \frac{e^x}{x} = \frac{e^{2x} - e^x}{x}$$

2. On a pour tout  $x > 0$ ,  $2x > x$ , donc  $\forall x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x} > 0$ . La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .

De plus, pour tout  $x > 0$ ,  $t \mapsto \frac{e^t}{t}$  est positive sur  $[x, 2x]$  donc par positivité de l'intégrale,

$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \geq 0$ . On a donc  $f$  croissante sur  $]0, +\infty[$  et minorée par 0. Ainsi, par le théorème de la limite monotone,  $f$  admet une limite finie  $\ell$  en  $0^+$  : on peut prolonger  $f$  par continuité en 0 en posant  $f(0) = \ell$ .

Soit  $x > 0$ , on a :

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \left[ \ln(t) \right]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln(2)$$

La fonction  $t \mapsto e^t$  est croissante sur  $[x, 2x]$ , donc :

$$\forall t \in [x, 2x], \quad \frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t}$$

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que :

$$\int_x^{2x} \frac{e^x}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t} dt$$

ou autrement dit que :

$$e^x \ln(2) \leq f(x) \leq e^{2x} \ln(2)$$

En passant à la limite dans l'inégalité lorsque  $x \rightarrow 0^+$ , par encadrement, on déduit alors que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ln(2)$$

3.

$$f : \begin{array}{l} [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt & \text{si } x > 0 \\ \ln(2) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

La fonction  $f$  est à présent continue sur  $[0, +\infty[$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$ .

De plus,

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x} = e^x \frac{e^x - 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} e^x \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$$

Donc par le Théorème de Prolongement  $\mathcal{C}^1$ ,  $f$  est dérivable en 0,  $f'(0) = 1$  et  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$ .

4. On a déjà déterminé l'expression de  $f'$  sur  $] - \infty, 0[$ . Il est facile de vérifier que cette expression est également valable sur  $] - \infty, 0[$ . On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x} \geq 0$$

Donc  $f$  est croissante sur  $] - \infty, 0[$  et croissante sur  $]0, +\infty[$ , donc puisqu'elle est de plus continue en 0, elle est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

On a déjà dit également que  $f$  était positive sur  $[0, +\infty[$ .

De plus, pour tout  $x < 0$ , on a :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = - \int_{2x}^x \frac{e^t}{t} dt$$

et la fonction  $t \mapsto \frac{e^t}{t}$  est négative sur  $[2x, x]$ , donc d'intégrale négative, et on a donc  $f(x) \geq 0$ .

Ainsi, la fonction  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

5. Pour nous aider à tracer l'allure de la courbe, regardons les limites de  $f$ .

On a pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$ ,  $\frac{e^t}{t} \geq 1$ , donc pour tout  $x > 0$ ,

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \geq \int_x^{2x} 1 dt = (2x) - x = x \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$$

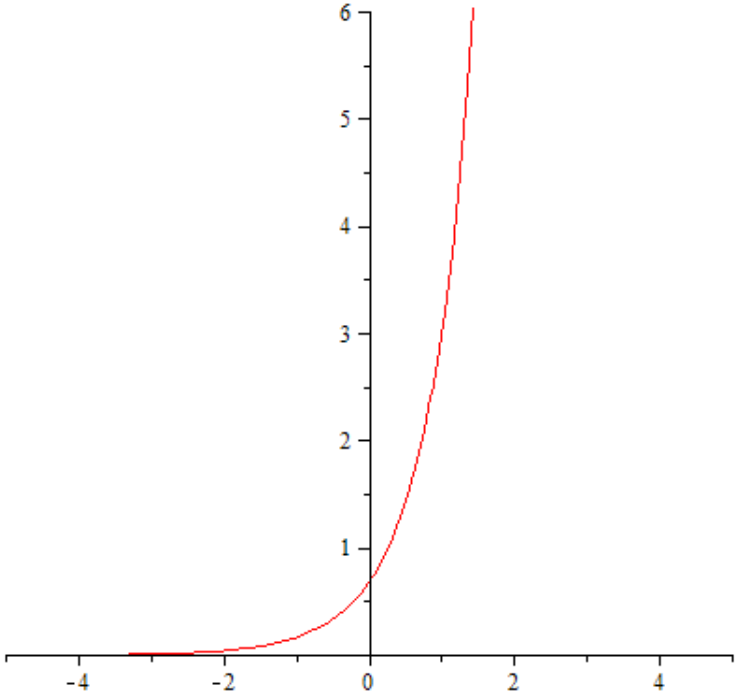
Par comparaison, on a donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

De plus,  $\forall t < -1$ ,  $-\frac{1}{t} \leq 1$ , on a donc :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \int_{2x}^x \left( \frac{e^t}{-t} \right) dt \leq \int_{2x}^x e^t dt = e^x - e^{2x} \underset{x \rightarrow -\infty}{\rightarrow} 0$$

Par encadrement, (puisque  $f$  est positive), on a donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .

D'où l'allure de la courbe :



**16** On pose  $g(x) = (2x - 1) \int_{1/2}^x \frac{t^4}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$ .

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction  $g$ .
2. Démontrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$ .
3. Résoudre l'équation  $g(x) = 0$ .

1. La fonction  $\varphi : t \mapsto \frac{t^4}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'intégrale  $\int_{1/2}^x \varphi(t)dt$  existe.

La fonction  $g$  est donc bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $x \geq 1/2$ . Alors  $2x - 1 \geq 0$ . De plus,  $\varphi$  est positive sur  $[1/2, x]$  donc par positivité de l'intégrale  $\int_{1/2}^x \varphi(t)dt \geq 0$ . Par produit on a donc bien  $g(x) \geq 0$ .

Soit  $x \leq 1/2$ . Alors  $2x - 1 \leq 0$ . De plus,  $\int_{1/2}^x \varphi(t)dt = - \int_x^{1/2} \varphi(t) \leq 0$  (mêmes raisons, puisque  $\varphi$  est positive, puis positivité de l'intégrale  $\int_x^{1/2} \varphi(t) \geq 0$ ). Ainsi, par produit, on a bien  $g(x) \geq 0$ .

On a donc bien montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$$

3. On a de manière évidente déjà que  $g(1/2) = 0$ .

De plus, pour tout  $x \neq 1/2$ , la fonction  $\varphi$  étant positive sur  $[1/2, x]$  (ou  $[x, 1/2]$ ) et non identiquement nulle, l'intégrale  $\int_{1/2}^x \varphi(t)dt$  n'est pas nulle. Donc  $g$  ne s'annule qu'en  $1/2$ .

**17** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 1}}$

- Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
- $f$  est-elle paire ? impaire ?
- Démontrer que pour  $x > 0$ , on a  $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2x}$
- En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4 + 1}}$  est continue sur  $[x, 2x]$  (ou  $[2x, x]$ ), donc  $f(x)$  est bien défini pour tout réel  $x$  :

$$D_f = \mathbb{R}$$

- Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a à l'aide d'un changement de variable  $t = -u$  :

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 1}} = \int_x^{2x} \frac{-du}{\sqrt{(-u)^4 + 1}} = - \int_x^{2x} \frac{du}{\sqrt{u^4 + 1}} = -f(x)$$

donc la fonction  $f$  est impaire.

- Soit  $x > 0$ . On a alors pour tout  $t \in [x, 2x]$ ,  $\sqrt{t^4 + 1} \geq \sqrt{t^4} = t^2$ .

On a donc :

$$\forall t \in [x, 2x], 0 \leq \frac{1}{\sqrt{t^4 + 1}} \leq \frac{1}{t^2}$$

D'où en intégrant :

$$0 \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 1}} \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t^2} dt = \left[ \frac{-1}{t} \right]_x^{2x} = \frac{-1}{2x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$$

On a donc bien :

$$\forall x > 0, 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2x}$$

- Par encadrement, on en déduit alors que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Puis, par imparité, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$