

1 Déterminer si les séries suivantes sont convergentes et si oui, calculer leur somme :

$$\begin{array}{l}
 1. \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}. \\
 2. \sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 3. \sum_{n \geq 2} \frac{\ln \left(\frac{n+1}{n} \right)}{\ln(n) \ln(n+1)} \\
 4. \sum_{n \geq 0} \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}. \\
 5. \sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right)
 \end{array}$$

1. Pour $N \geq 2$, on a :

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$$

La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge et on a : $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$.

2. Pour $N \geq 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^N \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^N (\ln(n+1) - \ln(n)) = \ln(N+1) - \ln(1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ diverge.

3. Pour $N \geq 2$, on a :

$$\sum_{n=2}^N \frac{\ln \left(\frac{n+1}{n} \right)}{\ln(n) \ln(n+1)} = \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n+1)} \right) = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(N+1)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(2)}$$

La série $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln \left(\frac{n+1}{n} \right)}{\ln(n) \ln(n+1)}$ converge et on a : $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln \left(\frac{n+1}{n} \right)}{\ln(n) \ln(n+1)} = \frac{1}{\ln(2)}$.

4. Pour $N \geq 0$, on a :

$$\sum_{n=0}^N \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) = 1 - \frac{1}{2N+3} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$$

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$ converge et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = 1$.

5. Pour $N \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N \ln \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right) &= \sum_{n=1}^N \left((\ln(n+1) - \ln(n)) + (\ln(n+1) - \ln(n+2)) \right) \\
 &= (\ln(N+1) - \ln(1)) + (\ln(2) - \ln(N+2)) = \ln(2) - \ln \left(1 + \frac{1}{N+1} \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ln(2)
 \end{aligned}$$

La série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right)$ converge et on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right) = \ln(2)$.

2] Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme.

$$1. \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$$

$$2. \sum_{n \geq 0} e^{-n}.$$

$$3. \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n n!}.$$

$$4. \sum_{n \geq 0} \frac{n + 2^n}{n!}$$

$$5. \sum_{n \geq 1} \frac{3}{5^n}$$

$$6. \sum_{n \geq 0} \frac{n + 1}{n!}$$

$$7. \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n!}$$

$$8. \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 3n}{2^n}$$

1. On reconnaît une série géométrique convergente (car $|\frac{1}{2}| < 1$) : $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \boxed{2}$.

2. On reconnaît une série géométrique convergente (car $|e^{-1}| < 1$) : $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \boxed{\frac{e-1}{e}}$.

3. On reconnaît directement une série exponentielle convergente : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{2})^n}{n!} = e^{1/2} = \boxed{\sqrt{e}}$.

4. Pour $N \geq 1$, on a : $\sum_{n=0}^N \frac{n + 2^n}{n!} = \sum_{n=1}^N \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^N \frac{2^n}{n!} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^N \frac{2^n}{n!} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} + \sum_{n=0}^N \frac{2^n}{n!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e^1 + e^2$
(séries exponentielles convergentes). Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n + 2^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n + 2^n}{n!} = \boxed{e + e^2}$.

5. On reconnaît une série géométrique convergente (car $|\frac{1}{5}| < 1$) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{5^n} = 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 3 \times \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

6. Pour $N \geq 1$, on a : $\sum_{n=0}^N \frac{n + 1}{n!} = \sum_{n=1}^N \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e^1 + e^1$
(séries exponentielles convergentes). Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n + 1}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n + 1}{n!} = \boxed{2e}$.

7. Pour $N \geq 2$, on a :

$$\sum_{n=0}^N \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=0}^N \frac{n(n-1) + n}{n!} = \sum_{n=2}^N \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=1}^N \frac{n}{n!} = \sum_{n=2}^N \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{k!} + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e^1 + e^1$$

(séries exponentielles convergentes). Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = \boxed{2e}$.

8. Pour $n \geq 0$, on a :

$$\sum_{n=0}^N \frac{n^2 + 3n}{2^n} = \sum_{n=0}^N (n(n-1) + 4n) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4} \sum_{n=2}^N n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 4 \times \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \times \frac{2}{(1 - \frac{1}{2})^3} + 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1 - \frac{1}{2})^2}$$

(séries géométriques dérivées convergentes). La série $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 3n}{2^n}$ converge et donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 3n}{2^n} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{(1 - \frac{1}{2})^3} + 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1 - \frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2} \times 8 + 2 \times 4 = \boxed{12}$$

3 On admet que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Calculer les sommes suivantes, après avoir justifié leur convergence :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

1. On a : $\frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4n^2}$, donc puisque la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge, la série de terme général $\frac{1}{(2n)^2}$ converge également, et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \boxed{\frac{\pi^2}{24}}$$

2. On a pour tout $n \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{(2n+1)^2} \leq \frac{1}{(2n)^2}$.

Or, la série de terme général $\frac{1}{(2n)^2}$ converge, donc par critère de comparaison des suites positives, la série de terme général $\frac{1}{(2n+1)^2}$ converge donc aussi.

De plus, en séparant tous les termes pairs/impairs, on peut remarquer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}$$

3. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente (puisque $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge), donc converge.

De plus, en séparant une nouvelle fois les termes pairs/impairs, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8} = \boxed{-\frac{\pi^2}{12}}$$

4 Soit x un réel fixé. On note $A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

- Justifier que A et B existent.
- Calculer $A + B$ et $A - B$. En déduire les valeurs de A et B .

1. Soit x réel. On a :

$$\forall n \geq 0, \quad 0 \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{(x^2)^n}{(2n)!} \leq \frac{(x^2)^n}{n!}$$

Or, la série de terme général $\frac{(x^2)^n}{n!}$ converge (série exponentielle), donc par critère de comparaison de suites positives, la série de terme général $\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ est bien convergente. La somme A existe bien.

De même, pour tout réel x , On a :

$$\forall n \geq 0, \quad 0 \leq \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{(x^2)^n}{(2n+1)!} \leq \frac{(x^2)^n}{n!}$$

Or, la série de terme général $\frac{(x^2)^n}{n!}$ converge (série exponentielle), donc par critère de comparaison de suites positives, la série de terme général $\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ est bien convergente, et donc la série de terme général $x \times \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ converge finalement aussi. La somme B existe bien.

2. Remarquons que, en regroupant A et B , on obtient :

$$A + B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

De même remarquons que :

$$A - B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{k!} = e^{-x}$$

On a donc :

$$\begin{cases} A + B = e^x \\ A - B = e^{-x} \end{cases} \implies \begin{cases} 2A = e^x + e^{-x} \\ 2B = e^x - e^{-x} \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ B = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

5 Déterminer la nature des séries de termes généraux :

1. $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$	5. $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$	8. $\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$
2. $\exp\left(\frac{1}{n^2}\right)$	6. $\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right)$	9. $\frac{\ln(n)}{n^2}$
3. $2^{2n-1}e^{-n}$	7. $\ln\left(\frac{e^{2n}+2}{e^{2n}+1}\right)$	10. $(e^{1/n} - 1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
4. $\frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$		

On rappelle qu'au voisinage de 0, on a : $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow +0}{\sim} x$, $e^x - 1 \underset{x \rightarrow +0}{\sim} x$.

Remarque : Dans cet exercice, on ne s'intéresse qu'à la nature des séries, donc inutile de regarder la somme partielle. Il suffit d'utiliser un critère de comparaison, d'équivalence, de négligeabilité, pour conclure à la convergence/divergence de la série rapidement.

1. $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}$

Or, la série de terme général $1/n$ diverge (série harmonique), donc par critère d'équivalence de suites positives, la série de terme $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ est donc divergente.

2. $\exp\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} e^0 = 1$, donc nécessairement la série diverge grossièrement (puisque le terme général ne tend même pas vers 0).

3. $2^{2n-1}e^{-n} = \frac{2^{2n-1}}{e^n} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{e}\right)^n$. C'est le terme général d'une série géométrique, de raison $\frac{4}{e} > 1$, donc la série diverge.

4. $\frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$. Pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n^2}$$

Or, la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (Riemann), donc par critère de comparaison de suites positives, la série de terme général $\frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ converge aussi.

5. Sachant que $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on a :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

Or, la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (Riemann), donc par critère d'équivalence de suites positives, la série de terme général $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ est de même nature, donc converge aussi.

6. Sachant que $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on a :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

Or, la série de terme général $\frac{1}{n^{3/2}}$ converge (Riemann), donc par critère d'équivalence de suites positives, la série de terme général $\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right)$ est de même nature, donc converge aussi.

7. Sachant que $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on a :

$$\ln\left(\frac{e^{2n}+2}{e^{2n}+1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{e^{2n}+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{e^{2n}+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{e^{2n}} = \left(\frac{1}{e^2}\right)^n$$

Or, la série de terme général $\left(\frac{1}{e^2}\right)^n$ converge (série géométrique, avec $|\frac{1}{e^2}| < 1$), donc par critère d'équivalence de suites positives, la série de terme général $\ln\left(\frac{e^{2n} + 2}{e^{2n} + 1}\right)$ est de même nature, donc converge aussi.

8. Pour tout $n \geq 3$ (on a donc $n > e$), on a :

$$\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$$

Or, la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (Riemann), donc par critère de comparaison de suites positives, la série de terme général $\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ diverge aussi.

9. Remarquons que :

$$\ln(n) = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(\sqrt{n}) \implies \frac{\ln(n)}{n^2} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2}\right) \implies \frac{\ln(n)}{n^2} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Or, la série de terme général $\frac{1}{n^{3/2}}$ converge (Riemann), donc par critère de négligeabilité de suites positives, la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n^2}$ converge aussi.

10. Sachant que $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on a :

$$\left(e^{1/n} - 1\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$

Or, la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (Riemann), donc par critère d'équivalence de suites positives, la série de terme général $\left(e^{1/n} - 1\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge aussi.

6

1. Pour tout $k \geq 1$, montrer que :

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{k^2}$$

2. En déduire que pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \int_1^n \frac{1}{t^2} dt + 1$$

Conclure que la série de terme général $1/k^2$ est convergente, et donner un encadrement de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

1. Soit $k \geq 1$.

Sur le segment $[k, k+1]$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est décroissante, donc :

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

Par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans le bon sens), on a :

$$\frac{1}{(k+1)^2} \int_k^{k+1} 1 dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{k^2} \int_k^{k+1} 1 dt$$

autrement dit :

$$\boxed{\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{k^2}}$$

2. Soit $n \geq 2$. En sommant l'inégalité de droite précédente pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

et donc par relation de Chasles sur les intégrales,

$$\boxed{\int_1^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}}$$

De même, en sommant l'inégalité de gauche de la question 1 pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt$$

autrement dit par changement d'indice dans la première somme, et relation de Chasles sur les intégrales :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \int_1^n \frac{1}{t^2} dt \implies \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t^2} dt \implies \boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \int_1^n \frac{1}{t^2} dt + 1}$$

On a donc bien montré que : pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \int_1^n \frac{1}{t^2} dt + 1$$

En notant pour $n \geq 2$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, on a donc montré que :

$$1 - \frac{1}{n+1} \leq S_n \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 = 2 - \frac{1}{n}$$

Donc en particulier :

$$1 - \frac{1}{n+1} \leq S_n \leq 2$$

La suite (S_n) est donc croissante, et majorée par 2, donc converge vers une limite finie.

La série de terme général $1/k^2$ est donc bien convergente, et par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on en déduit que :

$$1 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$$

7

1. (a) Pour tout $k \geq 2$, montrer que :

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \frac{1}{k \ln(k)}$$

(b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge, et déterminer un équivalent de $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$.

2. Montrer, en utilisant une méthode analogue de comparaison somme/intégrale, que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^2(n)}$ converge.

1. (a) Soit $k \geq 2$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$ est décroissante sur le segment $[k, k+1]$. On a donc :

$$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \frac{1}{t \ln(t)} \leq \frac{1}{k \ln(k)}$$

Donc, par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans le bon sens),

$$\boxed{\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \frac{1}{k \ln(k)}}$$

(b) Soit $n \geq 3$. En sommant l'inégalité de droite précédente, pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$$

En sommant l'inégalité de gauche du 1(a) pour $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, on a :

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \int_2^n \frac{1}{t \ln(t)} dt, \quad \text{autrement dit :} \quad \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln(k)} \leq \int_2^n \frac{1}{t \ln(t)} dt$$

et finalement :

$$\boxed{\int_2^{n+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \leq \int_2^n \frac{1}{t \ln(t)} dt + \frac{1}{2 \ln(2)}}$$

Or, une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)} = \frac{1/t}{\ln(t)}$ sur $[2; +\infty[$ est $t \mapsto \ln(|\ln(t)|) = \ln(\ln(t))$. On peut donc dire que :

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2 \ln(2)}$$

Les deux membres encadrant $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$ sont équivalents à $\ln(\ln(n))$, donc par encadrement :

$$\boxed{\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))}$$

et en particulier, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} = +\infty$ et la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge.

2. Soit $k \geq 2$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t \ln^2(t)}$ est décroissante sur le segment $[k, k+1]$. On a donc :

$$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{(k+1) \ln^2(k+1)} \leq \frac{1}{t \ln^2(t)} \leq \frac{1}{k \ln^2(k)}$$

Donc, par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans le bon sens),

$$\boxed{\frac{1}{(k+1) \ln^2(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln^2(t)} dt \leq \frac{1}{k \ln^2(k)}}$$

Soit à présent $n \geq 3$. En sommant l'inégalité de droite précédente, pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t \ln^2(t)} dt \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln^2(k)}$$

En sommant l'inégalité de gauche du 1(a) pour $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, on a :

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k+1) \ln^2(k+1)} \leq \int_2^n \frac{1}{t \ln^2(t)} dt, \quad \text{autrement dit : } \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln^2(k)} \leq \int_2^n \frac{1}{t \ln^2(t)} dt$$

et finalement :

$$\boxed{\int_2^{n+1} \frac{1}{t \ln^2(t)} dt \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln^2(k)} \leq \int_2^n \frac{1}{t \ln^2(t)} dt + \frac{1}{2 \ln^2(2)}}$$

Or, une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t \ln^2(t)} = \frac{1/t}{\ln^2(t)}$ est $t \mapsto -\frac{1}{\ln(t)}$. On peut donc dire que :

$$\frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n+1)} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln^2(k)} \leq \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{2 \ln^2(2)}$$

Notons $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln^2(k)}$ pour tout $n \geq 3$.

La suite (S_n) est donc croissante (somme de termes positifs), et la suite (S_n) est majorée par $\frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{2 \ln^2(2)}$, donc la suite (S_n) converge.

La série de terme général $\frac{1}{n \ln^2(n)}$ est donc bien convergente.

8 À l'aide d'une comparaison somme/intégrale, montrer que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

Soit $k \geq 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur le segment $[k, k+1]$. On a donc :

$$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

Donc, par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans le bon sens),

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$$

Soit $n \geq 2$.

En sommant l'inégalité de droite précédente, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

En sommant l'inégalité de gauche précédente pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt, \quad \text{autrement dit :} \quad \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt$$

et finalement :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt + 1$$

autrement dit :

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1$$

Les deux membres encadrant $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ étant équivalents à $\ln(n)$, on en déduit par encadrement que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

9 À l'aide d'une comparaison somme/intégrale, montrer que pour tout réel $\alpha < 1$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Raisonnons par disjonction de cas:

Soit $\alpha \in [0, 1[$.

Soit $k \geq 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur le segment $[k, k+1]$. On a donc :

$$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

Ainsi, par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans le bon sens),

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

Soit $n \geq 2$. En sommant l'inégalité de droite précédente, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$$

En sommant l'inégalité de gauche précédente pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt, \quad \text{autrement dit :} \quad \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt$$

et finalement :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt + 1$$

autrement dit :

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} + 1$$

Les deux membres encadrant $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ étant équivalents à $\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, on en déduit par encadrement que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Soit $\alpha < 0$.

Soit $k \geq 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est croissante sur le segment $[k, k+1]$. On a donc :

$$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{(k+1)^\alpha}$$

Ainsi, par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans le bon sens),

$$\boxed{\frac{1}{k^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{(k+1)^\alpha}}$$

Soit $n \geq 2$. En sommant l'inégalité de gauche précédente, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

En sommant l'inégalité de droite précédente pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a :

$$\int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha}, \quad \text{autrement dit :} \quad \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha}$$

et finalement :

$$\boxed{\int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt + 1 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt}$$

autrement dit :

$$\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} + 1 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

Les deux membres encadrant $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ étant équivalents à $\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, on en déduit par encadrement que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$$

10 Soit (a_n) la suite définie par $a_1 = 0$, $a_2 = 4/9$ et :

$$\forall n \geq 1, a_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{9}a_n$$

Montrer que la série de terme général a_n converge, et vérifier que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$$

On reconnaît une suite récurrente linéaire double.

L'équation caractéristique associée est $x^2 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} \iff x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} = 0$, qui admet deux solutions réelles : $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$. Ainsi, il existe deux constantes α et β telles que :

$$\forall n \geq 1, a_n = \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^n + \beta \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

On voit donc déjà que a_n est la somme de termes généraux de séries géométriques convergentes, donc la série de terme général a_n va bien être convergente.

Remarquons que

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 4/9 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta = 0 \\ \frac{4}{9}\alpha + \frac{1}{9}\beta = \frac{4}{9} \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = 2/3 \\ \beta = 4/3 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\forall n \geq 1, a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 4 \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

De plus, on a en reconnaissant des séries géométriques convergentes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1 - \frac{2}{3}} - 4 \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{1}$$

11 Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(e^{u_n} - u_n)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
2. Montrer que (u_n) converge vers une limite à déterminer.
3. Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

1. On procède par récurrence.

- On sait que $u_0 = 1 > 0$.
- Soit $n \geq 0$ fixé, supposons que pour cet entier n , on ait $u_n > 0$.
On aimerait montrer que $u_{n+1} > 0 \iff \ln(e^{u_n} - u_n) > 0 \iff e^{u_n} - u_n > 1$.

Posons $\varphi : x \mapsto e^x - x$.

La fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0, \varphi'(x) = e^x - 1 > 0$. La fonction φ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 1$, donc $\forall x > 0, \varphi(x) > 1$:

$$\forall x > 0, e^x - x > 1$$

donc, puisque par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$, on a $e^{u_n} - u_n > 1$, donc $u_{n+1} = \ln(e^{u_n} - u_n) > 0$.

- Finalement, par récurrence, on a bien que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = \ln(e^{u_n} - u_n) = \ln\left(e^{u_n} \left(1 - \frac{u_n}{e^{u_n}}\right)\right) = u_n + \ln\left(1 - \frac{u_n}{e^{u_n}}\right)$$

Ainsi :

$$u_{n+1} - u_n = \ln\left(1 - \frac{u_n}{e^{u_n}}\right) < 0$$

(car $u_n > 0$, donc $1 - \frac{u_n}{e^{u_n}} < 1$).

La suite (u_n) est donc décroissante, minorée par 0, elle est donc convergente vers une limite $\ell \geq 0$.

Par passage à la limite dans la formule de récurrence de (u_n) , on obtient que :

$$\ell = \ln(e^\ell - \ell) \implies e^\ell = e^\ell - \ell \implies \ell = 0$$

La suite (u_n) est donc convergente vers 0.

3. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = \ln(e^{u_n} - u_n) \implies e^{u_{n+1}} = e^{u_n} - u_n \implies u_n = e^{u_n} - e^{u_{n+1}}$$

Soit $N \geq 0$. On a :

$$\sum_{n=0}^N u_n = \sum_{n=0}^N (e^{u_n} - e^{u_{n+1}}) = e^{u_0} - e^{u_{N+1}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e^1 - e^0$$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = e - 1$.

12 Soit (u_n) définie par $u_0 \in]0, 1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$, puis que (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que $\sum u_n^2$ converge et calculer sa somme.

1. Par récurrence montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$.

- Par définition $0 < u_0 < 1$.

- Soit $n \geq 0$. Supposons que pour cet entier n , on ait $0 < u_n < 1$.

Alors $u_{n+1} = u_n(1 - u_n) \in]0, 1[$ (comme produit de deux nombres de $]0, 1[$).

- Par récurrence, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$.

La suite (u_n) est donc minorée par 0, et décroissante (puisque $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$), donc converge vers un réel ℓ .

Par passage à la limite dans l'égalité « $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$ », on a donc $\ell = \ell - \ell^2$, autrement dit $\ell^2 = 0$, donc $\ell = 0$.

La suite (u_n) converge donc bien vers 0.

2. Pour $N \geq 0$, on a :

$$\sum_{k=0}^N u_k^2 = \sum_{k=0}^N (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} u_0$$

Ainsi, la série $\sum u_n^2$ converge bien, et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k^2 = u_0$$

13 Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

2. On pose pour tout entier $n, v_n = \ln(u_n)$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = v_0 - v_{n+1}$.

3. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

1. Par une récurrence immédiate, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e^{u_n}} < 1$$

la suite (u_n) est donc décroissante, et minorée par 0, donc converge vers un réel ℓ .

Par passage à la limite dans l'égalité « $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ », on a :

$$\ell = \ell e^{-\ell} \iff \ell(1 - e^{-\ell}) = 0 \iff \ell = 0 \text{ ou } e^{-\ell} = 1 \iff \ell = 0$$

La suite (u_n) converge donc vers 0.

2. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \implies \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) + \ln(e^{-u_n}) \implies v_{n+1} = v_n - u_n \implies u_n = v_n - v_{n+1}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}$$

3. On a donc pour $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^n u_k = v_0 - v_{n+1} = \ln(u_0) - \ln(u_{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

(car $u_n \rightarrow 0^+$, donc $\ln(u_n) \rightarrow -\infty$).

Ainsi, la série de terme général u_n est donc divergente.

14 Soit α un réel et n un entier naturel non nul. On considère l'équation suivante :

$$x^n + n^\alpha x - 1 = 0$$

1. Montrer que cette équation admet une unique racine positive, qu'on note x_n .
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ lorsque $\alpha \geq 0$.
3. On suppose que $\alpha > 0$.
 - (a) Déterminer un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.
 - (b) Étudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum x_n, \quad \sum \ln(x_n), \quad \sum \ln(1 + x_n^\beta) \quad (\text{avec } \beta \in \mathbb{R}), \quad \sum \left(x_n - \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

1. Soit α un réel. Pour $n \geq 1$, notons pour $x \geq 0$, $f_n(x) = x^n + n^\alpha x - 1$.
 La fonction f_n est continue sur $[0, +\infty[$ (somme de fonctions continues), strictement croissante sur $[0, +\infty[$ (comme somme de fonctions strictement croissantes), donc f_n réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers $f_n([0, +\infty[) = [f_n(0), \lim_{+\infty} f_n[= [-1, +\infty[$.
 Comme $0 \in [-1, +\infty[= f_n([0, +\infty[)$, il existe un unique $x_n \in [0, +\infty[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

$$\exists! x_n \in [0, +\infty[/ (x_n)^n + n^\alpha x_n - 1 = 0$$

2. Raisonnons par disjonction de cas:

- Si $\alpha > 0$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \frac{1 - x_n^n}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

Puisque la suite (x_n) est positive, par encadrement, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

La suite (x_n) converge vers 0.

- Si $\alpha = 0$, on a pour tout $n > 0$, $f_n(x_n) = x_n^n + x_n - 1 = 0$.
 et $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n + x_{n+1} - 1 = x_{n+1}^n + x_{n+1} - 1 = x_{n+1}^n + (1 - x_{n+1}^{n+1}) - 1 = x_{n+1}^n(1 - x_{n+1}) = x_{n+1}^n \times x_{n+1}^{n+1} \geq 0$, donc $f_n(x_{n+1}) \geq f_n(x_n)$, la fonction f_n étant croissante, on a donc $x_{n+1} \geq x_n$, donc la suite (x_n) est croissante, majorée par 1, elle converge vers un réel ℓ tel que $0 < x_n \leq 1$.
 Si $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ avec $\ell \neq 1$, alors $\ln(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln(\ell) < 0$, et alors $x_n^n = \exp(n \ln(x_n)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, ce qui contredit que $x_n^n = 1 - x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 - \ell \neq 0$.

Ainsi, nécessairement, (x_n) converge vers 1.

3. (a) D'après la question précédente, on sait que pour $\alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n = 0$ et :

$$x_n = \frac{1 - x_n^n}{n^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$$

- (b) • On sait que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$. Les deux suites étant positives, on applique le critère d'équivalence pour les suites positives :

$$\sum_{n \geq 1} x_n \text{ converge} \iff \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

- On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(x_n) = -\infty$, donc on a nécessairement (car le terme général ne tend pas vers 0) :

$$\sum_{n \geq 1} \ln(x_n) \text{ diverge}$$

- Soit $\beta \in \mathbb{R}$.

★ Si $\beta \leq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^\beta \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + x_n^\beta) \neq 0$, donc :

$$\sum_{n \geq 1} \ln(1 + x_n^\beta) \text{ diverge}$$

★ Si $\beta > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^\beta = 0$ et :

$$\ln(1 + x_n^\beta) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x_n^\beta \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha\beta}}$$

Les deux suites étant positives, on applique le critère d'équivalence pour les suites positives :

$$\sum_{n \geq 1} \ln(1 + x_n^\beta) \text{ converge} \iff \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha\beta}} \text{ converge} \iff \alpha\beta > 1$$

• Enfin, on sait que $x_n = \frac{1 - x_n^n}{n^\alpha}$, donc :

$$0 < \frac{1}{n^\alpha} - x_n = \frac{x_n^n}{n^\alpha} \leq x_n^n < \frac{1}{n^{\alpha n}}$$

Pour n assez grand, on a $\alpha n > 2$, donc à partir d'un certain rang, on aura :

$$0 < \frac{1}{n^\alpha} - x_n < \frac{1}{n^2}$$

Puisque $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann), le Théorème de Comparaison des suites positives nous permet de conclure :

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n^\alpha} - x_n \right) \text{ converge}$$

et donc également :

$$\sum_{n \geq 1} \left(x_n - \frac{1}{n^\alpha} \right) \text{ converge}$$

15 Soit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$.

1. Montrer que (u_n) décroît à partir du rang 3.
2. Etudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} u_n, \sum_{n \geq 2} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right), \sum_{n \geq 1} e^{u_n} \sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{1+u_n}, \sum_{n \geq 1} u_n^2, \sum_{n \geq 1} (-1)^n u_n$$

1. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $\forall x > 0$, $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Sur $[e, +\infty[$, la fonction f est décroissante, et donc la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 3 \geq e$.

2. • Pour $n \geq 3$, on a :

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n} > 0$$

Or, la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc par comparaison de suites positives, la série $\sum u_n$ diverge également.

- Pour $N \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=2}^N \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=2}^N (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \ln(u_{N+1}) - \ln(u_2) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\infty$$

(car (u_n) converge vers 0 par croissances comparées). Ainsi, la série $\sum_{n \geq 2} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge grossièrement.

- Puisque (u_n) converge vers 0, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{u_n} = 1$. Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} e^{u_n}$ diverge grossièrement (puisque le terme général ne tend même pas vers 0).
- Puisque (u_n) converge vers 0, on a :

$$\frac{u_n}{1+u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$$

Donc par critère d'équivalence de suites positives, les séries $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ et $\sum u_n$ sont de même nature, donc la série de terme général $\frac{u_n}{1+u_n}$ diverge.

- On a $u_n^2 = \frac{\ln^2(n)}{n^2}$. On a :

$$\ln^2(n) = o(\sqrt{n}) \implies \frac{\ln^2(n)}{n^2} = o\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2}\right) \implies u_n^2 = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Or, la série de terme général $\frac{1}{n^{3/2}}$ converge (Riemann), donc par critère de négligeabilité de suites positives, la série $\sum u_n^2$ est convergente également.

- La série $\sum (-1)^n u_n$ n'est pas absolument convergente.

Regardons si elle converge en étudiant la suite des sommes partielles.

$$\text{Posons } S_n = \sum_{k=3}^n (-1)^k u_k.$$

On a $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} < 0$ donc (S_{2n}) est décroissante.

On a $S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+3} > 0$, donc (S_{2n+1}) est croissante.

On a $S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, donc convergent vers une même limite, ce qui prouve que (S_n) converge, et donc la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.

16

1. Vérifier que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t} dt = \int_0^{1/2} \left(\frac{t^n - 1}{1-t} + \frac{1}{1-t} \right) dt$$

2. En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k} + \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t} dt.$$

3. Conclure que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n2^n}$ converge et que sa somme vaut $\ln(2)$.

1. Il suffit de remarquer que pour tout $t \in [0, 1/2]$, on a :

$$\frac{t^n - 1}{1-t} + \frac{1}{1-t} = \frac{t^n}{1-t}$$

2. En remarquant que $\frac{1-t^n}{1-t} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k$ (somme des termes d'une suite géométrique), on a :

$$\int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t} dt + \int_0^{1/2} \frac{1-t^n}{1-t} dt = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-t} dt$$

autrement dit :

$$\int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t} dt + \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{1/2} t^k dt = \left[-\ln(1-t) \right]_0^{1/2}$$

autrement dit :

$$\ln(2) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^{1/2} + \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t} dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} + \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t} dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k} + \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t} dt.$$

3. Pour $n \geq 1$, on a :

$$0 \leq \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t} \leq \int_0^{1/2} \frac{t^n}{\frac{1}{2}} dt = 2 \int_0^{1/2} t^n dt = 2 \left(\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} \right)$$

Donc par encadrement, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t} dt = 0$$

Ainsi, d'après la question 2, on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k} = \ln(2)$$

autrement dit la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n2^n}$ converge et sa somme vaut $\ln(2)$.

17 Pour tout $n \geq 1$ et tout réel $x > 0$, on note : $v_n(x) = \frac{1 - \exp(-nx)}{n(n+1)}$.

1. Montrer que la série de terme général $v_n(x)$ converge. Dans la suite de l'exercice, on note

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$$

2. En admettant que pour tout réel $y \in]-1, 1[$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n} = -\ln(1-y)$$

montrer que

$$f(x) = (1 - \exp(x)) \ln(1 - \exp(-x))$$

1. Pour $x > 0$ et n grand, on a :

$$v_n(x) = \frac{1 - e^{-nx}}{n(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

Or, la série de terme général $1/n^2$ converge (Riemann), donc par critère d'équivalence de suites positives, on en déduit que la série de terme général $v_n(x)$ est de même nature, donc converge également.

2. Soit $N \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N v_k(x) &= \sum_{k=1}^N \frac{1 - e^{-kx}}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^N (1 - e^{-kx}) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \left(\frac{e^{-kx}}{k} - \frac{e^{-kx}}{k+1} \right) \right] \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} - \sum_{k=1}^N \frac{e^{-kx}}{k} + \sum_{k=1}^N \frac{e^{-kx}}{k+1} \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} - \sum_{k=1}^N \frac{(e^{-x})^k}{k} + \sum_{k=2}^{N+1} \frac{e^{-(k-1)x}}{k} \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} - \sum_{k=1}^N \frac{(e^{-x})^k}{k} + e^x \sum_{k=2}^{N+1} \frac{e^{-kx}}{k} \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} - \sum_{k=1}^N \frac{(e^{-x})^k}{k} + e^x \left(\sum_{k=1}^{N+1} \frac{(e^{-x})^k}{k} - e^{-x} \right) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1 - 0 - \left(-\ln(1 - e^{-x}) \right) + e^x \left(-\ln(1 - e^{-x}) - e^{-x} \right) = \boxed{(1 - e^x) \ln(1 - e^{-x})} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall x > 0, f(x) = (1 - \exp(x)) \ln(1 - \exp(-x))$$

- 18** 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$. Montrer que la suite (I_n) converge vers 0.
2. En utilisant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$, calculer la somme $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$ en fonction de I_n .
- En déduire la convergence de $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.
3. Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ converge et déterminer sa somme.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi, par encadrement, on a bien que (I_n) converge vers 0.

2. En utilisant la formule proposée,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_0^1 t^{k-1} dt = - \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n (-t)^{k-1} \right) dt = - \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k \right) dt \\ &= - \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1 - (-t)} dt = - \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = -\ln(2) + (-1)^n I_n \end{aligned}$$

Comme (I_n) converge vers 0, par produit avec une suite bornée, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n I_n = 0$.

Finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$$

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge donc, et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$$

- 3.

$$\left| \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \right| = \frac{1}{n(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

Or, la série de terme général $1/n^2$ converge (Riemann), donc par critère d'équivalence de suites positives, la série de terme général $\left| \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \right|$ converge, donc la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ est absolument convergente, donc converge.

Pour $N \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^N (-1)^k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=2}^{N+1} \frac{(-1)^k}{k} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\ln(2) + (-\ln(2) + 1) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = 1 - 2\ln(2)$$