(1) Soit $F = \{ P \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ P(1) = P(2) = 0 \}$

Ainsi tout polynôme P appartenant à F admet pour racine $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

De plus, comme $P \in \mathbb{R}_3[x]$, on peut écrire :

$P = (ax+b)(x-1)(x-2)$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Donc $P = a(x^2 - x)(x-2) + b(x-1)(x-2)$

$= a(x^3 - 3x^2 + 2x) + b(x-1)(x-2)$

Ainsi $F = \text{Vect}(x^3 - 3x^2 + 2x, (x-1)(x-2))$

Or $x^3 - 3x^2 + 2x$ est un polynôme de degré 3 et $(x-1)(x-2)$ est un polynôme de degré 2.

Donc F est un sev de $\mathbb{R}_3[x]$ en tant qu'espace vectoriel engendré.

$(x^3 - 3x^2 + 2x, (x-1)(x-2))$ est une base de F car libre et génératrice ($(x^3 - 3x^2 + 2x)$ et $(x-1)(x-2)$ sont de degré différent).

On a donc $\dim F = 2$.

exercice 2 :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \to & \mathbb{R}_2[x] \\ P & \mapsto & P(x+1) - P(x) . \end{array}$$

a) mq f endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ $\Leftrightarrow$ f est linéaire et $\mathbb{R}_2[x]$ stable par f.

- soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[x]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(x+1) - (\lambda P + Q)(x)$$
$$= \lambda P(x+1) - \lambda P(x) + Q(x+1) - Q(x)$$
$$= \lambda(P(x+1) - P(x)) + Q(x+1) - Q(x) = \lambda f(P) + f(Q)$$

$\Rightarrow$ f est bien linéaire.

- montrer que $\mathbb{R}_2[x]$ stable par f $\Leftrightarrow$ mq $f(\mathbb{R}_2[x]) \subset \mathbb{R}_2[x]$.
vrai par définition ; $f(\mathbb{R}_2[x]) \subset \mathbb{R}_2[x]$.

b)
$$\text{Mat}(f)_{\mathbb{R}_2[x]} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(1) & f(x) & f(x^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \end{array}$$

- soit $P : x \mapsto 1$
alors $f(P) = 1 - 1 = 0$

- soit $P : x \mapsto x$
alors $f(P) = x + 1 - x = 1$

- soit $P : x \mapsto x^2$
alors $f(P) = (x+1)^2 - x^2 = x^2 + 1 + 2x - x^2 = 2x + 1$

c) $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1), f(x), f(x^2))$
$= \text{Vect}(0, 1, 1 + 2x)$
$= \text{Vect}(1, 1 + 2x) = \mathbb{R}_1[x]$

soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

d'où $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(\quad a \quad) = \text{Vect}(1)$.

d) $g = f - 2Id$

soit G la matrice associée à g :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

la matrice associée à g est triangulaire sans 0 sur sa diagonale donc inversible.

$\Rightarrow$ donc g injective et $\ker(g) = \{0\}$

donc on a $0_{\mathbb{R}_2[x]}$ pour base de $\ker(g)$

donc $\dim(\ker(g)) = 0$.

par le théorème du rang : $\dim(\ker(g)) + rg(g) = \dim(\mathbb{R}_2[x])$

$\Leftrightarrow 0 + rg(Im(g)) = 3$

donc $Im(g)$ de dimension $3 = \dim(\mathbb{R}_2[x])$

et $Im(g) \subset \mathbb{R}_2[x]$ (car $\mathbb{R}_2[x]$ est l'espace d'arrivée de f et également de $-2Id$ et $\mathbb{R}_2[x]$ stable par somme)

$\Rightarrow$ donc $Im(g) = \mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 3

Montrer que $B = (1, x-1, (x-1)^3, (x+1)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

Il suffit de montrer que B est une famille de vecteurs libre et génératrice de $\mathbb{R}_3[x]$.
Pour cela, on raisonne avec un système, en montrant que la seule combinaison linéaire des vecteurs de B qui soit égale à $0_{\mathbb{R}_3[x]}$ est triviale.

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$a + b(x-1) + c(x-1)^3 + d(x+1)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a + bx - b + cx^3 - 3cx^2 + 3cx - c + dx^3 + 3dx^2 + 3dx + d = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b - c + d) + x(b + 3c + 3d) + x^2(3d - 3c) + x^3(c + d) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b - c + d = 0 \\ b + 3c + 3d = 0 \\ 3d - 3c = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ b = 0 \\ d = c \\ c = -d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Donc la seule combinaison linéaire des vecteurs de B qui soit nulle est triviale, donc B est une famille de vecteurs libre de $\mathbb{R}_3[x]$.
De plus, $\text{card}(B) = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[x])$
Donc B est une famille libre et génératrice $\mathbb{R}_3[x]$.

B est donc une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

4. Soit $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ P \longmapsto \begin{pmatrix} P(0) & P(1) \\ P'(0) & P'(1) \end{pmatrix} \end{array} \right.$

a. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_3[x]$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrons que $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$.

$$f(\lambda P + Q) = \begin{pmatrix} (\lambda P + Q)(0) & (\lambda P + Q)(1) \\ (\lambda P + Q)'(0) & (\lambda P + Q)'(1) \end{pmatrix}$$

par linéarité de la composition et de la dérivation $\rightarrow$
$$= \begin{pmatrix} \lambda P(0) + Q(0) & \lambda P(1) + Q(1) \\ \lambda P'(0) + Q'(0) & \lambda P'(1) + Q'(1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda P(0) & \lambda P(1) \\ \lambda P'(0) & \lambda P'(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q(0) & Q(1) \\ Q'(0) & Q'(1) \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} P(0) & P(1) \\ P'(0) & P'(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q(0) & Q(1) \\ Q'(0) & Q'(1) \end{pmatrix}$$

$$= \lambda f(P) + f(Q)$$

Donc f est une application linéaire.

b. Soit $\mathrm{Mat}(f)$ la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[x]$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- $f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $f(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
- $f(x^3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

On a :

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} f(1) & f(x) & f(x^2) & f(x^3) \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{array} \end{array}$$

Chapitre 10, révisions :

Exercice n° 5 :

Soit $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$M \mapsto \mathrm{tr}(M)I_2 - 2M$.

a. * Evidemment, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

* Soient $U, V \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$f(\lambda U + V) = \mathrm{tr}(\lambda U + V) I_2 - 2(\lambda U + V)$

$= \lambda \mathrm{tr}(U)I_2 + \mathrm{tr}(V)I_2 - 2\lambda U - 2V$

$f(\lambda U + V) = \lambda f(U) + f(V)$, par linéarité de l'application trace.

b. $\mathrm{Ker}(f) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{tr}(M)I_2 = 2M\} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / M = \frac{\mathrm{tr}(M)}{2} I_2\}$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \Rightarrow \frac{\mathrm{tr}(M)}{2} I_2 = \frac{a+d}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\begin{cases} a = \frac{a+d}{2} \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = \frac{a+d}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(I_2)}$.

D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$

$\Rightarrow \boxed{\mathrm{rg}(f) = 4 - 1 = 3}$.

$\mathrm{Im}(f) = \{f(M), M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\} = \left\{\begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\right\} = \left\{\begin{pmatrix} d-a & -2b \\ -2c & -(d-a) \end{pmatrix},\right.$

$\left.(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\right\} = \boxed{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Im}(f)}$, car $d-a$ décrit $\mathbb{R}$.

c. $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \neq \{0\} \Leftrightarrow f$ n'est pas injective.

f est un endomorphisme $\Rightarrow$ (f bijective $\Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow f$ surjective),

donc f n'est ni injective, ni bijective, ni surjective.

ou $\mathrm{rg}(f) = 3 < 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ donc f n'est pas surjective