Eléments de correction du DS2

Exercice 1

1. (a) u et v sont deux vecteurs clairement non colinéaires donc $(u;v)$ est une famille libre.

   (b) Etant donné que la quatrième composante de u est nulle, on a cherche a tel que $w = au - 4v$. En regardant les premières composantes de u et v on trouve $a = 7$. On vérifie que $7 \times 3 - 4 \times 4 = 5$ et que $7 \times (-1) - 4 \times (-2) = 1$ ainsi on a bien $w = 7u - 4v \in Vect(u, v)$.

   (c) On sait que $F = Vect(u, v, w)$ avec (u, v) libre et w combinaison linéaire de u et v donc une base de F est la famille (u, v) et sa dimension est 2.

2. (a) Soient a, b, c et d quatre réels tels que $au + bv + cx + dy = 0$. On obtient le système suivant :
$$\begin{cases} a + 5b + c + 6d = 0 \\ 3a + 4b + 3c + 7d = 0 \\ -a - 2b - 3d = 0 \\ b + 2d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ b = -2d \\ c = 3d \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$
   La famille (u, v, x, y) est une famille libre de quatre vecteurs dans $\mathbb{R}^4$ qui est un espace de dimension 4 donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

   (b) D'après la question 1.(b), le vecteur w est combinaison linéaire de u et v donc on peut donner sans calculs les coordonnées de w dans la base (u, v, x, y) soit $(7; -4; 0; 0)$.

3. (a) $H = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 / b = 3a + 7d \text{ et } c = -a - \frac{5}{4}d\}$
   donc $H = \{(a, 3a + 7d, -a - \frac{5}{4}d, d), a \in \mathbb{R} \text{ et } d \in \mathbb{R}\}$
   ce qui donne $H = Vect((1; 3; -1; 0), (0; 28; -5; 4)) = Vect(u, (0; 28; -5; 4))$. La famille $((1; 3; -1; 0), (0; 28; -5; 4))$ est composée de 2 vecteurs non colinéaires donc elle est libre et elle est génératrice par définition d'un sous espace vectoriel engendré. C'est donc une base de H.

   (b)
   - D'après la question précédente on a bien $u \in H = Vect(u, (0; 28; -5; 4))$.
     Remarque : On peut vérifier que les coordonnées de u satisfont les 2 équations de H si on a trouvé une autre famille génératrice pour H :
     $3 \times 1 - 3 + 7 \times 0 = 3 - 3 = 0$ et $1 + 3 + 4 \times (-1) - 2 \times 0 = 4 - 4 = 0$.
     Donc $u \in H$.
   - Vérifions que les coordonnées de v ne vérifient pas au moins une équation de H (le contraire de "et" est "ou") : $3 \times 5 - 4 + 7 \times 1 = 8 \neq 0$ donc $v \notin H$.
   - $u \in F \cap H$ donc $Vect(u) \subset F \cap H$ ainsi $1 \leq dim(F \cap H)$. De plus $F \cap H \subset F$ donc $dim(F \cap H) \leq 2$. Si $dim(F \cap H) = 2$ alors on aurait $F \cap H = F$ donc $F \subset H$ ce qui n'est pas possible car $v \in F$ mais $v \notin H$. Ainsi $dim(F \cap H) = 1$ et $F \cap H = Vect(u)$. Une base de $F \cap H$ est donc (u).

   (c) $F \cap H$ est donc de dimension 1. D'après la formule de Grassmann on a : dim(F+H)=dim(F)+dim(H)-dim($F \cap H$)= 2+2-1= 3. C'est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ engendré par exemple par (u,v, (0 ;28 ;-5 ;4)). En effet la famille (u,v) est libre et $(0; 28; -5; 4) \notin F$.

Exercice 2

1. $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

   $BC = 0_3$ et $CB = 0_3$ donc B et C commutent. On peut remarquer que B et C commutent parce que ce sont des polynômes en A.

2. $B^2 = \begin{pmatrix} 16 & -8 & -8 \\ 8 & -4 & -4 \\ -8 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4B$ (et $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 \\ -8 & 20 & 4 \\ 8 & -4 & 12 \end{pmatrix} = -4C$).

   Montrons par récurrence que $\forall k \geq 2, B^k = 4^{k-1}B$.
   On note pour tout entier naturel $n \geq 2, P_n$: "$B^n = 4^{n-1}B$"

   - La proposition est vraie pour $n = 2$ car $4B = B^2$ d'après le calcul précédent.
   - Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On suppose que la proposition P_n est vraie. Montrons que P_{n+1} est toujours vraie. $B^{n+1} = B^n \times B = 4^{n-1}B \times B = 4^{n-1}B^2 = 4^{n-1} \times 4B = 4^n B$ par hypothèse de récurrence et d'après le calcul précédent.
   - D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2 (on remarque que la propriété est évidemment vraie pour k=1).
     Remarque : De la même façon, on prouve que $\forall k \geq 2, C^k = (-4)^{k-1}C$ (on remarque que la propriété est évidemment vraie pour k=1).

3. (a) On raisonne par disjonction de cas :

   - $3B+C = \begin{pmatrix} 12 & -6 & -6 \\ 6 & -3 & -3 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -8 & -8 \\ 8 & -8 & -4 \\ -8 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 4A.$
     L'égalité est donc vraie pour n=1.
   - Soit n un entier supérieur ou égal à 2. De l'égalité précédente on déduit que $A = \frac{3}{4}B + \frac{1}{4}C$. Puisque les matrices $\frac{3}{4}B$ et $\frac{1}{4}C$ commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

     $$A^n = (\tfrac{3}{4}B + \tfrac{1}{4}C)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(\tfrac{3}{4})^k B^k (\tfrac{1}{4})^{n-k} C^{n-k}$$

     $$= (\tfrac{1}{4})^n C^n + (\tfrac{3}{4})^n B^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}(\tfrac{3}{4})^k \times 4^{k-1}B \times (\tfrac{1}{4})^{n-k} \times (-4)^{n-k-1}C$$

     $$= (\tfrac{1}{4})^n C^n + (\tfrac{3}{4})^n B^n + 0 \text{ car } BC = CB = 0$$

     $$= (\tfrac{1}{4})^n (-4)^{n-1}C + (\tfrac{3}{4})^n 4^{n-1}B$$

     $$= \tfrac{(-1)^{n-1}}{4}C + \tfrac{3^n}{4}B$$

   Remarque : un raisonnement par récurrence permet de démontrer l'égalité plus facilement encore !

   (b) $A^0 = I_3$ et $-C + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ donc $\frac{(-1)^{0-1}}{4}C + \frac{3^0}{4}B = I_3$.

   Le résultat est donc vrai pour $n = 0$.

4. (a) **Méthode 1 :** Avec la méthode de Gauss Jordan : on effectue les mêmes opérations élémentaires sur les lignes de A et I_3, on trouve : $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Méthode 2 : On résout le système AX= Y avec la méthode du pivot de Gauss pour $X = (x, y, z)$ et $Y = (a, b, c)$

Méthode 3 : ("last but not least" car c'est la plus simple en termes de calculs) On sait que BC = (A+I_3)(A-3I_3)= $A^2 - 2A - 3I_3$ =0 soit A(A-2I_3)=3 I_3.

A est inversible à droite donc inversible d'inverse $\frac{1}{3}(A-2I_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) $\frac{1}{4}C + \frac{1}{12}B = \begin{pmatrix} 0 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -1,25 & -0,25 \\ -0,5 & 0,25 & -0,75 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,25 & -0,25 \\ -0,5 & 0,25 & 0,25 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1,5 & -1,5 \\ 1,5 & -3,75 & -0,75 \\ -1,5 & 0,75 & -2,25 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,25 & -0,25 \\ -0,5 & 0,25 & 0,25 \end{pmatrix}$$

$= A^{-1}$.

La formule est vraie pour $n = -1$.

5. Soit λ un réel et $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a $AX = \lambda X$

$$\iff \begin{cases} (3-\lambda)x - 2y - 2z &= 0 \\ 2x - (2+\lambda)y - z &= 0 \\ -2x + y - \lambda z &= 0 \end{cases} \quad L_3 \leftrightarrow L_1$$

$$\iff \begin{cases} -2x + y - \lambda z &= 0 \\ 2x - (2+\lambda)y - z &= 0 \\ (3-\lambda)x - 2y - 2z &= 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + (3-\lambda)L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + y - \lambda z &= 0 \\ -(1+\lambda)y - (1+\lambda)z &= 0 \\ -(1+\lambda)y + (\lambda^2 - 3\lambda - 4)z &= 0 \end{cases}$$

- **1er cas :** $\lambda = -1$. Alors les 2 dernières équations du système deviennent 0=0, ainsi

$$AX = \lambda X \iff -2x + y + z = 0$$

Ainsi $\boxed{\mathscr{S} = \{(x, 2x - z, z),\ x, z \in \mathbb{R}\} = Vect((1, 2, 0); (0, -1, 1))}$.

- **2ème cas :** $\lambda \neq -1$. Alors

$$AX = \lambda X \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} -2x + y - \lambda z &= 0 \\ -(1+\lambda)y - (1+\lambda)z &= 0 \\ (\lambda^2 - 2\lambda - 3)z &= 0 \end{cases}$$

  - **Cas A :** $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \iff \lambda = 3$ (ou -1 ce qui est exclu dans le 2ème cas) . Ainsi

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} -2x + y - 3z &= 0 \\ -4y - 4z &= 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x &= -2z \\ y &= -z \end{cases}$$

  Ainsi $\boxed{\mathscr{S} = Vect((-2, -1, 1))}$

- **Cas B :** $\lambda \neq 3$. Alors le système est homogène et de Cramer donc il admet une seule solution $\boxed{\mathscr{S} = \{0\}}$.

En conclusion :

— Si $\lambda = -1$, alors il y a une infinité de solutions qui forment le plan vectoriel d'équation cartésienne $-2x + y + z = 0$.

— Si $\lambda = 3$, alors il y a une infinité de solutions qui forment la droite vectorielle dirigée par le vecteur de coordonnées $(-2, -1, 1)$.

— Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$, alors il y a une unique solution : le vecteur nul.

Exercice 3

1. Puisque A et S sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$, ils sont en somme directe, on sait alors avec la formule de Grassmann que dim(A)+dim(S)= n.
   De même dim(B)+dim(S)= n. On a bien dim(A)= n-dim(S)= dim(B).
2. (a) On suppose par l'absurde que $\forall x \in A, x \in B$ autrement dit $A \subset B$ alors comme $dim(A) = dim(B)$ on aurait $A = B$. Or on sait que $A \neq B$ ce qui est contradictoire. Ainsi il existe $u \in A$ tel que $u \notin B$. Par symétrie des rôles joués par A et B on a de même : il existe $v \in B$ tel que $v \notin A$.

   (b) On suppose par l'absurde que $w = u + v \in A$. Alors $v = (u + v) - v \in A$ car A est stable par combinaison linéaire. Ce qui est absurde par définition de v donc $w \notin A$. On montre de même que $w \notin B$. Ainsi $w \notin A \cup B$.

   (c) Verifions que $A \cap S = \{0\}$. Soit $x \in A \cap S$. Il existe un scalaire λ tel que $x = \lambda w$ car $x \in S$. Si $\lambda \neq 0$ alors $w = \frac{1}{\lambda} x \in A$ car $x \in A$ et A est un sev. Ce qui est absurde donc $\lambda = 0$ et $x = 0$. A et S sont bien en somme directe et puisque $dim(A) + dim(S) = n$, ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$. On montre de même que B et S sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

   (d) A = Vect((2,1,0) ; (0,0,1)) et $u = (0, 0, 1) \in A$ mais $u \notin B = Vect((2, 1, 3), (1, 0, 0))$. $v = (1, 0, 0) \in B$ mais $v \notin A$. Alors l'étude précédente montre que $w = (1, 0, 1)$ engendre un sous espace vectoriel supplémentaire commun à A et B.
   Soit $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$. On sait qu'une base de $\mathbb{R}^3$ est donnée par la concaténation d'une base de A et d'une base de S donc on cherche a,b,c des réels tels que $a(2, 1, 0) + b(0, 0, 1) + c(1, 0, 1) = (u_1, u_2, u_3)$

$$\iff \begin{cases} 2a + c &= u_1 \\ a &= u_2 \\ b + c &= u_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c &= u_1 - 2u_2 \\ a &= u_2 \\ b &= u_3 - u_1 + 2u_2 \end{cases}$$

   La décomposition de u dans la nouvelle base est $(u_2, u_3 - u_1 + 2u_2, u_1 - 2u_2)$

Problème Inspiré d'un sujet de l'EDHEC
Partie A

1. **Méthode 1 :** Raisonnons par disjonction de cas.
   - 1^{er} **cas :** Soit x un réel strictement positif.
     On a : $x > 0$
     $\Leftrightarrow e^x > 1$ car la fonction exponentielle est croissante
     $\Leftrightarrow \frac{e^x}{x} > \frac{1}{x}$
     $\Leftrightarrow \frac{e^x-1}{x} > 0$
   - 2^{me} **cas :** Soit x un réel strictement négatif.
     On a : $x < 0$
     $\Leftrightarrow e^x < 1$ car la fonction exponentielle est croissante
     $\Leftrightarrow \frac{e^x}{x} > \frac{1}{x}$
     $\Leftrightarrow \frac{e^x-1}{x} > 0$

   L'inégalité est donc vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
   Méthode 2 : Un tableau de signes permet aussi de conclure très facilement.
2. D'après la question précédente f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
   Elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-*$ en tant composée de fonctions continues. Montrons que f est continue en 0.
   On sait par équivalent usuel que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.
   Donc par composition $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} ln(\frac{e^x-1}{x}) = ln(1) = 0 = f(0)$.
   La fonction f est bien continue sur $\mathbb{R}$.
3. (a) f est clairement C^1 (et même C^∞) sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ par opérations sur les fonctions C^1, le dénominateur ne s'annulant pas. Pour tout réel $x \neq 0$, on a :
   $f'(x) = \dfrac{\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}}{\frac{e^x-1}{x}} = \frac{xe^x-e^x+1}{x^2} \times \frac{x}{e^x-1} = \frac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)}$.

   (b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$. et pour tout réel x on a : $g'(x) = xe^x$.
   $g'(x)$ est du signe x donc la fonction g est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$.

   (c) $g(0) = 0$ donc la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$. La fonction g est donc positive sur $\mathbb{R}$.

   (d) On rappelle que pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x(e^x-1)}$.
   g est positive donc f' est du signe de son dénominateur. Or le dénominateur de f' est du même signe que $\frac{e^x-1}{x}$. D'après la question 1), on peut donc en déduire que $f'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^* \Rightarrow f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   (e)
   - $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{e^x-1}{x} = 0^+$ donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{y\to 0^+} ln(y) = -\infty$.
   - Par équivalence et croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{y\to+\infty} ln(x) = +\infty$.

   (f) La fonction f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $J = \mathbb{R}$.

   (g) Puisque la fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et puisque $1 \in J$ alors l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
4. (a) L'égalité est vraie pour $x = 0$.
   Pour $x \neq 0$, on a :
   $f(-x) = ln(\frac{e^{-x}-1}{-x}) = ln(\frac{1-e^{-x}}{x}) = ln(\frac{e^{-x}(e^x-1)}{x}) = ln(\frac{e^x-1}{x}) + ln(e^{-x}) = f(x) - x$.

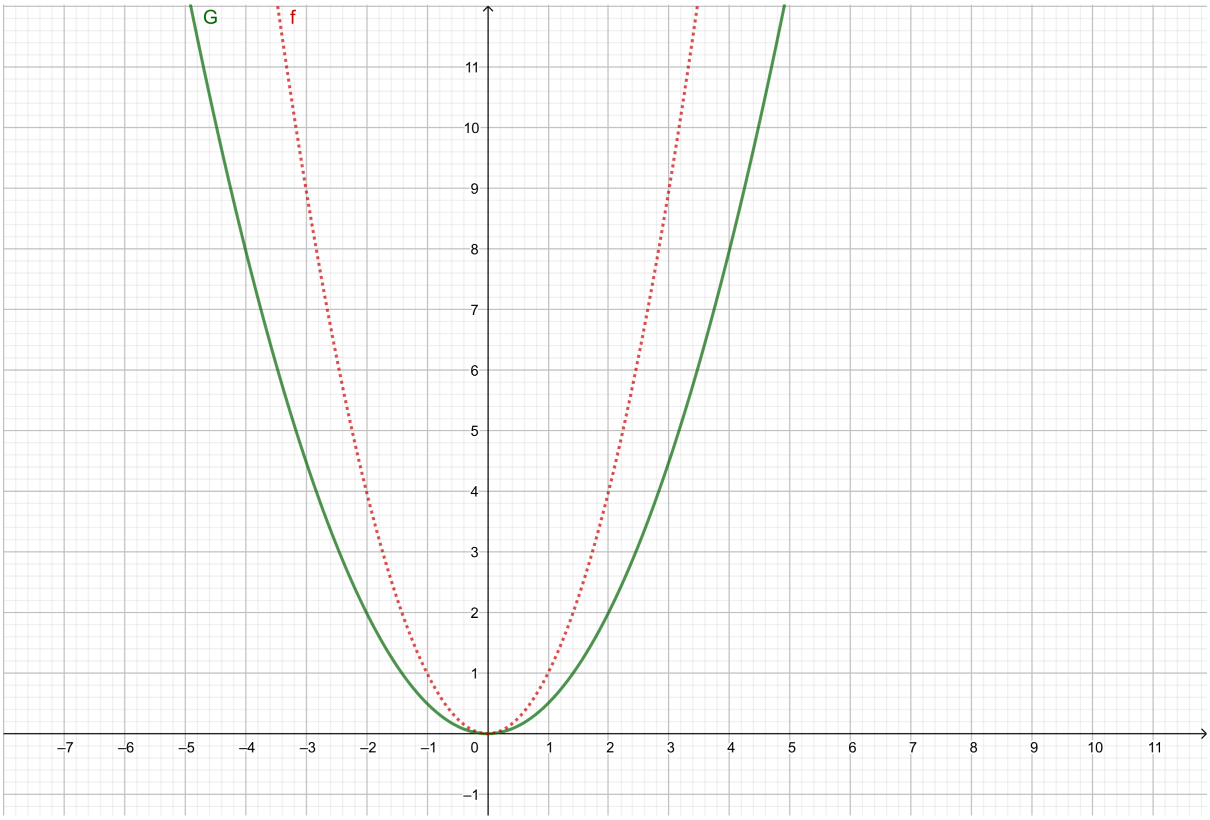
(b) Lorsque x décrit $\mathbb{R}_+^*$, $-x$ décrit $\mathbb{R}_-^*$.
Pour un réel strictement positif, le signe de $f(x)-x$ est donc celui de $f(-x)$ or f est strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ donc $f(x)-x$ est strictement négatif sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie B

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ d'après la question 2) de la partie A donc elle est intégrable sur $[0\,;x]$ pour tout réel x : F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Soit $x>\alpha$. Par croissance de f on sait que pour tout réel $t\in[\alpha;x]$, $f(t)>f(\alpha)$. Alors en intégrant cette inégalité (les bornes sont dans le bon ordre) on a : $\int_\alpha^x f(t)dt > \int_\alpha^x 1dt$ soit $\int_\alpha^x f(t)dt > x-\alpha$. Avec la relation de Chasles on sait que $F(x)=F(\alpha)+\int_\alpha^x f(t)dt > F(\alpha)+x-\alpha$. Alors par comparaison, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} F(\alpha)+x-\alpha=+\infty$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$
   (b) Soit $x<\beta$. Par croissance de f on sait que pour tout réel $t\in[x;\beta]$, $f(t)<f(\beta)$. Alors en intégrant cette inégalité (les bornes sont dans le bon ordre) on a : $\int_x^\beta f(t)dt < \int_x^\beta -1dt$ soit $\int_x^\beta f(t)dt < -\beta+x$ ou encore en multipliant par -1 cette inégalité : $\int_\beta^x f(t)dt > \beta - x$. Avec la relation de Chasles on sait que $F(x)=F(\beta)+\int_\beta^x f(t)dt > F(\beta)+\beta-x$. Alors par comparaison, puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} F(\beta)+\beta-x=+\infty$, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=+\infty$
   (c) D'après le cours, on sait que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F'(x)=f(x)$. La fonction f est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$ ce qui permet de dire que la fonction F est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.
3. (a) Soit x un réel. Avec le changement de variable t = -u et le résultat de la question 5a) de la partie A, on a :

   $F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt = -\int_0^x f(-u)du = -\int_0^x f(u)-u\,du = -F(x)+\frac{x^2}{2}$
   Donc pour tout réel x : $F(x)+F(-x)=\frac{x^2}{2}$.
   (b) L'ensemble de définition de F est centré en 0 mais en supposant par l'absurde que F est paire alors pour tout réel x on aurait $F(-x)=F(x)$ soit étant donné le résultat précédent $2F(x)=\frac{x^2}{2}$ et en dérivant il viendrait $2f(x)=x$ ce qui est faux. De même en supposant par l'absurde que la fonction F est impaire, alors on aurait pour tout réel $x, F(-x)=-F(x)$ soit étant donné le résultat précédent $0=\frac{x^2}{2}$ ce qui est faux. La fonction F est donc ni paire ni impaire.

(c) La fonction G est définie pour tout réel x par $G(x) = \frac{x^2}{2}$, elle est clairement paire et admet pour courbe celle de la fonction carrée contractée suivant le facteur 0,5 soit la courbe suivante :



Partie C

1. Soit n un entier naturel. $I_{n+1} - I_n = \int_0^{n+1} f(x)dx - \int_0^n f(x)dx = \int_n^{n+1} f(x)dx$.
   D'après la partie A, la fonction f est positive sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $[n; n+1]$.
   Par positivité de l'intégrale, les bornes étant dans le bon ordre, on peut en conclure que $I_{n+1} - I_n \geq 0$. La suite (I_n) est croissante. **Remarque :** On peut aussi utiliser les variations de F sur $]0; +\infty[$ et remarquer que $I_{n+1} - I_n = F(n+1) - F(n)$.
2. (a) Soit k un entier naturel. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc pour tout $x \in [k; k+1]$, on a : $f(k) \leq f(x) \leq f(k+1)$

   Par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans le bon ordre) :

$$\int_k^{k+1} f(k)dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k+1)dx$$

$$(k+1-k)f(k) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq (k+1-k)f(k+1)$$

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k+1)$$

   (b) Soit n un entier naturel au moins égal à 2. On somme pour k allant de 0 à $n-1$ les inégalités de la question précédente. On obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)$$

Puisque dans la première somme $f(0) = 0$ et avec un changement d'indice dans le dernier membre on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq I_n \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} ln(\frac{e^k-1}{k}) \leq I_n \leq \sum_{k=1}^{n} ln(\frac{e^k-1}{k})$$

Comme le logarithme transforme un produit en une somme il vient :

$$ln(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{e^k-1}{k}) \leq I_n \leq ln(\prod_{k=1}^{n} \frac{e^k-1}{k})$$

$$ln(\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(e^k-1)}{\prod_{k=1}^{n-1} k}) \leq I_n \leq ln(\frac{\prod_{k=1}^{n}(e^k-1)}{\prod_{k=1}^{n} k})$$

$$ln(\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(e^k-1)}{(n-1)!}) \leq I_n \leq ln(\frac{\prod_{k=1}^{n}(e^k-1)}{n!})$$

BONUS

1. Pour tout entier n on pose P_n : " $u_n > 0$"
   - P_0 est vraie car par hypothèse $u_0 > 0$.
   - Soit n un entier naturel. On suppose que P_n est vraie. Montrons que $u_{n+1} > 0$. $u_{n+1} = f(u_n)$ or $u_n > 0$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $f(u_n) > f(0)$ On a bien $u_{n+1} > f(0) = 0$.
   - D'après le principe de récurrence, pour tout entier n, $u_n > 0$.
2. Etudions, pour tout entier n, le signe de $u_{n+1} - u_n$. Soit n un entier naturel. On a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0$ car $u_n > 0$ et la fonction $x \mapsto f(x) - x$ est négative sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question 5b) de la partie A.
3. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0, alors elle est convergente d'après le théorème de la limite monotone.

BILAN : Apprenez des rédactions "toutes faites" pour montrer que :

- une fonction est continue, dérivable, C^1, C^∞ sur un intervalle
- une intégrale fonction de sa borne supérieure est bien définie

Pensez à vérifier vos réponses après :

- la résolution d'un système simple
- la recherche de l'inverse d'une matrice