Corrigé du devoir maison n°11

1a) $v_0 = u_1 + 2u_0 = 3$ et $v_1 = u_2 + 2u_1 = 3$

b) Soit n ∈ ℕ. On a $v_{n+2} = u_{n+3} + 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 2u_{n+2}$

$$= 3(v_n - 2u_n) - 2u_n + 2(v_{n+1} - 2u_{n+1})$$
$$= 3v_n + 2v_{n+1} - 4(u_{n+1} + 2u_n) = 3v_n + 2v_{n+1} - 4v_n$$
$$= 2v_{n+1} - v_n$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$.

c) On raisonne par récurrence sur n ∈ ℕ pour montrer que pour tout entier naturel n la propriété P_n: "$v_{n+1} = v_n$" est vraie:

Initialisation : $v_1 = v_0 = 3$ d'après la question 1a).

Hérédité : Soit n ∈ ℕ, on suppose que $v_n = v_{n+1}$ alors

$$v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n = 2v_{n+1} - v_{n+1} = v_{n+1}$$

Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle se transmet donc elle est vraie pour tout entier n.

Remarque : une récurrence double pour montrer que pour tout entier naturel n "$v_n = 3$" est vraie convient aussi.

La suite (v_n) est constante égale à 3 donc pour tout entier naturel n :
$v_n = 3 = u_{n+1} + 2u_n$ soit $u_{n+1} = -2u_n + 3$

d) (u_n) est une suite arithmético-géométrique.
1 est la solution de l'équation associée $x = -2x + 3$
donc d'après le chapitre 1, (u_n-1) est une suite géométrique de raison -2 et de premier terme u_0-1= 4=3 ainsi pour tout entier naturel n on a : $u_n - 1 = 3(-2)^n$ soit

$$u_n = 3(-2)^n + 1$$

e) On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique donc

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = 3\frac{1-(-2)^{n+1}}{3} + n + 1 = 1 - (-2)^{n+1} + n + 1 = -(-2)^{n+1} + n + 2$$

2a) $w_0 = 1$; $w_1 = 0$ et $w_2 = -1$ donc on a bien $w_2 - 2w_1 + w_0 = 0$

b) On raisonne par récurrence sur n ∈ ℕ pour montrer que pour tout entier naturel n P_n: "$w_{n+2} = 2w_{n+1} - w_n$" est vraie:

Initialisation : La propriété P_0 est vraie d'après la question 2a).

Hérédité : Soit n ∈ ℕ, on suppose que P_n est vraie alors

$$w_{n+3} = u_{n+3} - (-2)^{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n - (-2)^{n+3}$$
$$= 3(w_{n+1} + (-2)^{n+1}) - 2(w_n + (-2)^n) - (-2)^{n+3}$$
$$= 3w_{n+1} - 2w_n + 3(-2)^{n+1} + (-2)^{n+1} - 4(-2)^{n+1}$$
$$= 3w_{n+1} - 2(2w_{n+1} - w_{n+2}) = 2w_{n+2} - w_{n+1}$$

Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle se transmet donc elle est vraie pour tout entier n.

c) La suite (w_n) est récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$ ainsi il existe λ et μ des réels tels que pour tout entier n $w_n = \lambda + \mu n$. Avec $w_0 = 1 = \lambda$ et $w_1 = 0 = \lambda + \mu$ on obtient $w_n = 1 - n$.

d) Pour tout entier n on a : $u_n = w_n + (-2)^n = 1 - n + (-2)^n$

e) On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique et la somme des premiers entiers on a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = n + 1 - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1-(-2)^{n+1}}{3}$$