Corrigé du devoir maison n°14

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$ donc $u_n \sim \frac{1}{n^2}$ or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann) donc par critère d'équivalence des suites positives on en déduit que la série de terme général u_n converge également.

2) a) La fonction f est dérivable sur]0 ;+∞[en tant que quotient et composée de fonctions dérivables (le dénominateur ne s'annulant pas) et pour tout réel $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \times x^2 - 2x \times e^{\frac{1}{x}}}{x^4} = \frac{e^{\frac{1}{x}}(-2x-1)}{x^4} < 0$$

donc la fonction f est strictement décroissante sur]0 ;+∞[.

b) Soit k un entier naturel non nul, on a pour tout $x \in [k; k+1]$: $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$

Ainsi par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans le bon ordre) il vient :

$$\int_k^{k+1} f(k+1)dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx$$

$$soit$$

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$$

$$ou\ encore$$

$$u_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq u_k$$

c) Soit n un entier naturel non nul et m≥ n. En sommant les inégalités précédentes pour k variant de n à m on a :

$$\sum_{k=n}^{m} u_{k+1} \leq \sum_{k=n}^{m} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=n}^{m} u_k$$

Grâce à la relation de Chasles pour le terme au centre et à un changement d'indice pour le terme de gauche il vient :

$$\sum_{k=n+1}^{m+1} u_k \leq \int_n^{m+1} f(x)dx \leq \sum_{k=n+1}^{m} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

3) En passant à la limite quand m tend vers +∞ dans ces inégalités on a : $R_n \leq \int_n^{+\infty} f(x)dx \leq R_n + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$

Soit : $\int_n^{+\infty} f(x)dx - \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(x)dx$

En multipliant par n, on a : $n\int_n^{+\infty} f(x)dx - \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} \leq nR_n \leq n\int_n^{+\infty} f(x)dx$

En passant à la limite quand n tend vers +∞ dans ces inégalités on a : $1 - 0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} nR_n \leq 1$

Ainsi d'après le théorème d'encadrement on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} nR_n = 1$

c'est-à-dire $R_n \sim \frac{1}{n}$.