Corrigé du Devoir maison n°13

1. **Faux.** Contre-exemple : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$ La suite (u_n) est minorée par -1 mais n'a pas de limite.

2. **Faux.** Contre-exemple : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 - \frac{1}{n}$.
   La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 pourtant elle converge vers 1.

3. **Vrai.** Proposition 7 du chapitre 11

4. **Faux.** Contre-exemple : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$ La suite (u_n) est majorée par 1 mais n'est pas croissante.

5. **Vrai** si on considère que la limite peut être infinie. Théorème 25 du chapitre 11.
   Sinon $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$, fournit un exemple de suite croissante qui n'admet pas de limite finie.

6. **Faux.** Contre-exemple : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n n$

7. **Vrai.** Théorème 9 du chapitre 11.

8. **Faux.** Contre-exemple : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$. La suite $({u_n}^2)$ est constante égale à 1 donc converge vers 1 mais la suite (u_n) n'a pas de limite.

9. **Faux.** Contre-exemple : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln(n)$.

10. **Faux.** Contre-exemple : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n n$

11. **Vrai.** (u_n) est majorée par 2 donc avec le TLM (théorème 25 du chapitre 11), si elle est croissante alors elle est convergente.

12. **Faux.** Contre-exemple : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2(-1)^n - n$

13. **Faux.** Avec la passage à la limite, les inégalités deviennent larges. Contre-exemple : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{2n} + 1$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

14. **Faux** (il se peut que la suite ne converge pas). Contre-exemple : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{4}(-1)^n + 1{,}5$

15. **Faux.** Contre-exemple : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n + n^2$ et $v_n = n^2$

16. **Faux.** Contre-exemple : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\cos(n)}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$.

17. **Faux.** Contre-exemple : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n + n^2$ et $v_n = n^2$

18. **Vrai.** Les équivalents sont compatibles avec la multiplication. <u>Preuve :</u> On sait que $u_n = (1 + \propto_n)v_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \propto_n = 0$ et $a_n = (1 + \beta_n)b_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 0$ alors on a : $u_n a_n = (1 + \propto_n)v_n(1 + \beta_n)b_n = (1 + c_n)v_n b_n$ où $c_n = \propto_n + \beta_n + \propto_n \beta_n$ donc on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$ c'est-à-dire $u_n a_n \sim v_n b_n$ (au voisinage de $+\infty$)

19. **Vrai.** $\ln(2u_n) = \ln(2) + \ln(u_n)$ et $\ln(2)$ est bien négligeable devant $\ln((u_n)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

20. **Vrai.** Il existe une suite $(\propto_n)$ telle que $u_n = (1 + \propto_n)v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \propto_n = 0$ alors il existe un rang à partir duquel $\frac{-1}{2} < \propto_n < \frac{1}{2}$ soit $0 < \frac{1}{2} < 1 + \propto_n$ donc u_n et v_n sont du même signe à partir de ce rang.

Remarques :

- On recherche des contre exemples simples mais on fait attention qu'ils soient bien définis.
- Dans la question 16, plusieurs étudiants font référence à des suites adjacentes, ce n'est pas la même chose que des suites équivalentes
- Les justifications des propositions vraies n'étaient pas attendues.
- Je n'ai pas le moyen d'écrire sous le symbôle « ~ » avec ce traitement de texte mais dans une copie pensez bien à préciser si c'est en 0, en $+\infty$ ou ailleurs.