1 Soient X et Y indépendantes de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Application : Montrer que pour tout entier k, on a $\displaystyle\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j}$.

1. $$\boxed{\text{Si } X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p) \text{ et } Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(m,p), \text{ avec } X \text{ et } Y \text{ indépendantes, alors } Z = X+Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n+m,p)}$$

   En effet, si $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors X compte le nombre de succès sur n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p
   $$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \qquad \text{avec } X_1, \dots, X_n \text{ iid de loi } \mathcal{B}(p)$$
   De même, si $Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(m,p)$, alors Y compte le nombre de succès sur m épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p
   $$Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_m \qquad \text{avec } Y_1, \dots, Y_m \text{ iid de loi } \mathcal{B}(p)$$
   Finalement,
   $$Z = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n) + (Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_m)$$
   est la somme de $n+m$ variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de même paramètre p, donc Z suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n+m,p)$.

2. Reprenons la démonstration précédente par le calcul.
   On a $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0,m]\!]$, donc $Z(\Omega) = [\![0,n+m]\!]$.
   De plus, pour tout $k \in [\![0,n+m]\!]$, on a :
   $$\begin{aligned}
   \mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(X+Y=k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=0}^{k} [X=j] \cap [Y=k-j]\right) \\
   &= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}([X=j] \cap [Y=k-j]) \quad \text{(par incompatibilité des événements)} \\
   &= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X=j)\mathbb{P}(Y=k-j) \quad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y\text{)} \\
   &= \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{k-j} p^{k-j} (1-p)^{m-(k-j)} \\
   &= p^k (1-p)^{(n+m)-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j}
   \end{aligned}$$
   Or, on a vu d'après la modélisation que $\mathbb{P}(Z=k) = \displaystyle\binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{(n+m)-k}$ puisque $Z \rightsquigarrow \mathcal{B}(n+m,p)$.
   Finalement, par identification, on a nécessairement :
   $$\boxed{\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Soient X et Y indépendantes de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

1. Méthode 1 (par le calcul)
   $X(\Omega) = [\![1, +\infty[\![$ et $Y(\Omega) = [\![1, +\infty[\![$, donc par somme $Z(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$.

   De plus, pour tout $k \geqslant 2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X + Y = k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{k-1} [X = j] \cap [Y = k - j]\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k - j]) \quad \text{(par incompatibilité des événements)} \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}(X = j)\mathbb{P}(Y = k - j) \quad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y\text{)} \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} (1 - p)^{j-1} p (1 - p)^{(k-j)-1} p \\
&= p^2 (1 - p)^{k-2} \sum_{j=1}^{k-1} 1 \\
&= \boxed{(k - 1)p^2(1 - p)^{k-2}}
\end{aligned}$$

2. Méthode 2 (par modélisation et dénombrement).
   Si X désigne le rang du premier succès dans un schéma de Bernoulli de paramètre p, et Y désigne le nombre d'épreuves de Bernoulli supplémentaires après le premier succès pour avoir à nouveau un succès, alors X et Y suivent toutes deux des lois géométriques indépendantes de même paramètre p.
   Dans ce contexte, $Z = X + Y$ désigne exactement le rang du deuxième succès dans le schéma de Bernoulli de paramètre p.
   $Z(\Omega) = [\![2, +\infty]\!]$ (le deuxième succès ne peut intervenir qu'à partir de la deuxième épreuve).
   De plus, $[Z = k]$ se réalise si et seulement si le deuxième-succès se produit à la k-ième épreuve, on a donc en séparant selon où se situe le premier succès :

$$[Z = k] = \left[\boxed{S_1} E_2 E_3 \cdots E_{k-1} S_k\right] \cup \left[E_1 \boxed{S_2} E_3 \cdots E_{k-1} S_k\right] \cup \left[E_1 E_2 \boxed{S_3} \cdots E_{k-1} S_k\right] \cup \cdots \cup \left[E_1 E_2 \cdots E_{k-2} \boxed{S_{k-1}} S_k\right]$$

   $[Z = k]$ est donc la réunion de $k - 1$ événements incompatibles, tous de même probabilité $p^2(1 - p)^{k-2}$, donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(Z = k) = (k - 1) \times p^2 (1 - p)^{k-2}}$$

3 Soient X et Y indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

$X(\Omega) = [\![0, +\infty[\![$ et $Y(\Omega) = [\![0, +\infty[\![$, donc par somme $Z(\Omega) = [\![0, +\infty[\![$.

De plus, pour tout $k \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X + Y = k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=0}^{k} [X = j] \cap [Y = k - j]\right) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k - j]) \quad \text{(par incompatibilité des événements)} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X = j)\mathbb{P}(Y = k - j) \quad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y\text{)} \\
&= \sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\mu} \frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} \lambda^j \mu^{k-j} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^j \mu^{k-j} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!} \quad \text{(par formule du Binôme de Newton)}
\end{aligned}$$

Ainsi, Z suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

$$\boxed{\text{Si } X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda) \text{ et } Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\mu)\text{, avec } X \text{ et } Y \text{ indépendantes, alors } Z \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)}$$

$\boxed{4}$ Soient X et Y deux variables indépendantes de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$.
On note $Z = \min(X, Y)$ et $T = \max(X, Y)$. Déterminer la loi de Z et de T.

1. Loi de $Z = \min(X, Y)$.
Méthode 1 Par calcul explicite (mais long).

$X(\Omega) = [\![1, +\infty[\![$ et $Y(\Omega) = [\![1, +\infty[\![$, donc on a également $Z(\Omega) = [\![1, +\infty[\![$.

De plus, pour tout $k \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(\min(X, Y) = k) &= \mathbb{P}\left([X = k] \cap [Y > k]\right) + \mathbb{P}([X > k) \cap [Y = k]) + \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = k]) \\
&= \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y > k) + \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}(X > k) + \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k) \\
&= (1-p)^{k-1}p \times (1-q)^k + (1-q)^{k-1}q \times (1-p)^k + (1-p)^{k-1}p \times (1-q)^{k-1}q \\
&= (1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1}\left(p(1-q) + q(1-p) + pq\right) \\
&= \big((1-p)(1-q)\big)^{k-1}(p + q - pq) \\
&= \big(1 - (p + q - pq)\big)^{k-1}(p + q - pq)
\end{aligned}$$

donc Z suit une loi géométrique de paramètre $p + q - pq$.

Méthode 2 Par répartition/antirépartition (bien plus rapide !).

Pour tout $k \geqslant 1$, on a :

$$\mathbb{P}(Z > k) = \mathbb{P}(\min(X, Y) > k) = \mathbb{P}([X > k] \cap [Y > k]) = \mathbb{P}(X > k)\mathbb{P}(Y > k) = (1-p)^k \times (1-q)^k = \big((1-p)(1-q)\big)^k$$

et le résultat est bien encore valable pour $k = 0$, puisque $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$.
On a alors pour tout $k \geqslant 1$:

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z > k-1) - \mathbb{P}(Z > k) = \big((1-p)(1-q)\big)^{k-1} - \big((1-p)(1-q)\big)^k = ((1-p)(1-q))^{k-1}\left(1 - (1-p)(1-q)\right)$$

et on retrouve que Z suit une loi géométrique de paramètre $1 - (1-p)(1-q) = p + q - pq$.

Méthode 3 Par modélisation.

Si on considère que X et Y sont deux variables aléatoires associées à deux schémas de Bernoulli indépendants de paramètres respectifs p et q (par exemple deux joueurs A et B jouent chacun avec une pièce, X est le rang du premier Pile du joueur A, et Y est le rang du premier Pile du joueur B), alors Z désigne le rang du premier succès qui apparaîtra entre les deux joueurs.
On a donc encore un schéma de Bernoulli qui se répète, le succès étant à chaque épreuve qu'il y ait au moins un des joueurs qui obtienne un succès. Le succès est donc de $p + q - pq$ (l'un ou l'autre), ce qui équivaut à $1 - (1-p)(1-q)$ (l'inverse du fait qu'il y ait deux échecs).
Ainsi, Z suit bien une loi géométrique de paramètre $p + q - pq$.

$$\boxed{\text{Si } X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p) \text{ et } Y \rightsquigarrow \mathcal{G}(q), \text{ avec } X \text{ et } Y \text{ indépendantes, alors } Z = \min(X, Y) \rightsquigarrow \mathcal{G}(p + q - pq)}$$

2. Loi de $T = \max(X, Y)$.

   Ici, clairement T ne peut pas être une loi géométrique puisque cela ne désigne plus un premier succès (mais plutôt le « dernier » succès ...).

   On garde donc la méthode 2, qui est clairement la plus rapide.

   Pour tout $k \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T \leqslant k) &= \mathbb{P}(\max(X, Y) \leqslant k) \\
&= \mathbb{P}([X \leqslant k] \cap [Y \leqslant k]) \\
&= \mathbb{P}(X \leqslant k)\mathbb{P}(Y \leqslant k) \\
&= (1 - \mathbb{P}(X > k))\,(1 - \mathbb{P}(Y > k)) \\
&= (1 - (1-p)^k)(1 - (1-q)^k) \qquad = 1 - (1-p)^k - (1-q)^k + (1-p)^k(1-q)^k
\end{aligned}$$

   et le résultat est bien encore valable pour $k = 0$, puisque $\mathbb{P}(T \leqslant 0) = 0$.

   On a alors pour tout $k \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T = k) &= \mathbb{P}(T \leqslant k) - \mathbb{P}(T \leqslant k-1) \\
&= 1 - (1-p)^k - (1-q)^k + (1-p)^k(1-q)^k - \Big(1 - (1-p)^{k-1} - (1-q)^{k-1} + (1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1}\Big) \\
&= \boxed{p(1-p)^{k-1} + q(1-q)^{k-1} - (p+q-pq)((1-p)(1-q))^{k-1}}
\end{aligned}$$

5 Soit X une variable de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer l'espérance de $\dfrac{1}{X+1}$.

Notons $Y = \dfrac{1}{X+1}$. Remarquons que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, donc $Y(\Omega) \subset]0, 1]$, la variable aléatoire Y est donc bornée donc admet bien une espérance.
De plus, avec le théorème de transfert, $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{X+1}\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1}\mathbb{P}(X = k)$
Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k+1}\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k+1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=1}^{N+1} \frac{\lambda^{k}}{k!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(\sum_{k=0}^{N+1} \frac{\lambda^{k}}{k!} - 1)
\end{aligned}$$

Ainsi en passant à la limite dans ces égalités on a:
$\mathbb{E}[Y] = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - 1\right) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) = \boxed{\dfrac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}}$

6 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre p, admettant espérance et variance. Calculer la covariance de $U = X+Y$ et $V = X-Y$. U et V sont-elles indépendantes ?

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(U,V) &= \mathbb{E}[UV] - \mathbb{E}[U]\mathbb{E}[V] \\
&= \mathbb{E}[(X+Y)(X-Y)] - \mathbb{E}[X+Y]\mathbb{E}[X-Y] \\
&= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y])(\mathbb{E}[X]-\mathbb{E}[Y]) \\
&= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[X])(\mathbb{E}[X]-\mathbb{E}[X]) \\
&= \boxed{0}
\end{aligned}$$

Les variables U et V ne sont cependant par indépendantes. Par exemple :

$$\mathbb{P}(U=3) = \mathbb{P}(X+Y=3) = \mathbb{P}(X=1, Y=2) + \mathbb{P}(X=2, Y=1) = 2p^2(1-p) \neq 0$$

et

$$\mathbb{P}(V=0) = \mathbb{P}(X=Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k, Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2(k-1)} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} \neq 0$$

mais

$$\mathbb{P}(U=3 \cap V=0) = 0$$

donc U et V ne sont pas indépendantes.

7 Soient X, Y, Z trois variables indépendantes de même loi de Poisson de paramètre λ.
On note $S = X + Y$ et $T = X + Z$.

1. Calculer la covariance de S et T.
2. Les variables S et T sont-elles indépendantes ?

1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(S,T) &= \mathbb{E}(ST) - \mathbb{E}(S)\mathbb{E}(T) \\
&= \mathbb{E}((X+Y)(X+Z)) - \mathbb{E}(X+Y)\mathbb{E}(X+Z) \\
&= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(XZ) + \mathbb{E}(YZ) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))(\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Z)) \quad \text{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(XZ) + \mathbb{E}(YZ) - ((E(X))^2 + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z) + \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)) \\
&= V(X) \quad \text{(par indépendance des variables)} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

2. Puisque $\lambda > 0$ (pour que ce soit cohérent pour être le paramètre d'une loi de Poisson), on a $\mathrm{cov}(S,T) \neq 0$, donc S et T ne sont pas indépendantes.

8 On effectue des lancers d'une pièce qui fait Pile avec probabilité p. Soit X le rang d'apparition du r-ième Pile. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

1. X désigne le rang du r-ième succès dans un schéma de Bernoulli de paramètre p.
   Déjà $X(\Omega) = [\![r, +\infty[\![$. En effet, le r-ième succès ne peut n'apparaître qu'après la r-ième épreuve (donc $X(\Omega) \subset [\![r, +\infty[\![$), et réciproquement, tout entier de $[\![r, +\infty[\![$ est une valeur possible pour X.

   De plus, pour tout $k \geqslant r$, on a :
   $$\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}}$$
   En effet, notons pour tout j, la variable Z_j comptant le nombre de Pile obtenus sur les j premiers lancers. Alors, on sait que Z_j suit une loi binomiale $\mathcal{B}(j, p)$.
   De plus,
   $$[X = k] = [Z_{k-1} = r - 1] \cap P_k$$
   En effet, $[X = k]$ se réalise si et seulement si on obtient un Pile (le r-ième) au k-ième lancer et si avant sur les $k-1$ premiers lancers, on avait exactement $r-1$ Pile.
   Par indépendance des événements $[Z_{k-1} = r - 1]$ et P_k (ils ne concernent pas les mêmes lancers), on a donc :
   $$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Z_{k-1} = r - 1)\mathbb{P}(P_k) = \binom{k-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{(k-1)-(r-1)} \times p = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

   Remarque : par un dénombrement direct, on peut dire que $[X = k]$ est réalisé si et seulement si on a, sur les k premiers lancers de la pièce, exactement r Pile et $k - r$ Face, dont un Pile exactement au cours du k-ième lancer.
   Chaque issue réalisant $[X = k]$ est donc de probabilité $p^r(1-p)^{k-r}$.
   Enfin, il y a exactement $\binom{k-1}{r-1}$ issues possibles, c'est-à-dire, autant de choix possibles pour les $r-1$ premiers Pile sur les $k-1$ premiers lancers. D'où : $\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$.

2. Pour l'espérance et la variance, on écrit plutôt :
   $$X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_r$$
   où les Y_k sont des variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre p. En effet, Y_k désigne ici le nombre de lancers supplémentaires après le $(k-1)$-ième Pile pour obtenir le k-ième Pile.
   On a alors par linéarité :
   $$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{r} Y_k\right] = \sum_{k=1}^{r} \mathbb{E}[Y_k] = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{p} = \boxed{\frac{r}{p}}$$
   et par indépendance des variables :
   $$\mathbb{V}[X] = \mathbb{V}\left[\sum_{k=1}^{r} Y_k\right] = \sum_{k=1}^{r} \mathbb{V}[Y_k] = \sum_{k=1}^{r} \frac{1-p}{p^2} = \boxed{\frac{r(1-p)}{p^2}}$$

9 Soient X et Y indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$.

1. Déterminer les lois de $S = X + Y$ et $D = X - Y$.
2. Déterminer la loi de (S, D) et calculer $cov(S, D)$.
3. S et D sont-elles indépendantes ?

1. S suit directement une loi binomiale $\mathcal{B}(2, p)$, donc :

$$S(\Omega) = \{0, 1, 2\} \quad \text{et} \qquad \forall k \in \{0, 1, 2\}, \mathbb{P}(S = k) = \binom{2}{k} p^k (1-p)^{2-k}$$

Finalement, on en déduit la loi de S :

k	0	1	2
$\mathbb{P}(S = k)$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

On a : $D(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$.
$\mathbb{P}(D = -1) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 1) = p(1-p)$
$\mathbb{P}(D = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 0) = p(1-p)$
On en déduit que $\mathbb{P}(D = 0) = 1 - 2p(1-p) = p^2 + (1-p)^2$.
Finalement, on en déduit la loi de D :

k	-1	0	1
$\mathbb{P}(D = k)$	$p(1-p)$	$p^2 + (1-p)^2$	$p(1-p)$

2. En terme d'événements, puis en terme de probabilités, on a :

$S \setminus D$	-1	0	1
0	$\emptyset$	$(X = 0, Y = 0)$	$\emptyset$
1	$(X = 0, Y = 1)$	$\emptyset$	$(X = 1, Y = 0)$
2	$\emptyset$	$(X = 1, Y = 1)$	$\emptyset$

$S \setminus D$	-1	0	1
0	0	$(1-p)^2$	0
1	$p(1-p)$	0	$p(1-p)$
2	0	p^2	0

et on a directement :

$$\text{cov}(S, D) = \mathbb{E}[SD] - \mathbb{E}[S]\mathbb{E}[D] = (\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[Y^2]) - \mathbb{E}[S](\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]) = 0 - \mathbb{E}[S]0 = 0$$

3. Les variables S et D ne sont pas indépendantes, puisque par exemple :

$$\mathbb{P}(S = 0, D = 1) = 0 \quad \text{mais} \quad \mathbb{P}(S = 0)\mathbb{P}(D = 1) = p(1-p)^3 \neq 0$$

10 Soient X et Y indépendantes de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$.
Donner la loi de X conditionnellement à l'événement $[X+Y=n]$.

Puisque X et Y sont indépendantes, par stabilité de la loi de Poisson, on sait donc que $X+Y$ suit également une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.
On a donc :

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

- si $k > n$, alors $\mathbb{P}_{[X+Y=n]}(X=k) = 0$.
- si $0 \leqslant k \leqslant n$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X+Y=n]}(X=k) &= \frac{\mathbb{P}([X=k]\cap[X+Y=n])}{\mathbb{P}(X+Y=n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}([X=k]\cap[Y=n-k])}{\mathbb{P}(X+Y=n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} \quad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y\text{)} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}\times e^{-\mu}\dfrac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\dfrac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad \text{avec } p = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}
\end{aligned}$$

Ainsi, sachant $[X+Y=n]$, alors X suit une loi binoniale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

11 Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$. Pour $n \geqslant 1$, on note $Y_n = X_n X_{n+1}$. Reconnaître la loi de Y_n. Calculer alors l'espérance et la variance de $S_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$.

1. Puisque pour tout $k \geqslant 1$, $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$, on a aussi $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$, donc Y_n suit une loi de Bernoulli également.
   Pour trouver le paramètre, il suffit de calculer $\mathbb{P}(Y_n = 1)$ ou bien $\mathbb{E}[Y_n]$.
   Le plus rapide est d'utiliser l'espérance avec l'indépendance de X_n et X_{n+1} :
   $$\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[X_n X_{n+1}] = \mathbb{E}[X_n]\mathbb{E}[X_{n+1}] = p^2$$
   Ainsi Y_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p^2.

   Remarquons que Y_n représente encore une épreuve succès/échec, un succès étant d'avoir deux succès consécutifs aux épreuves n et $n+1$ du schéma de Bernoulli initial.
2. Par linéarité de l'espérance, on a donc :
   $$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} Y_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[Y_k] = \sum_{k=1}^{n} p^2 = \boxed{np^2}$$
3. Les variables Y_k n'étant a priori pas indépendantes (par exemple $Y_1 = X_1 X_2$ et $Y_2 = X_2 X_3$ dépendent toutes les deux de la variable X_2.)
   On a donc par formule de la variance d'une somme :
   $$\begin{aligned}\mathbb{V}[S_n] &= \mathbb{V}\left[\sum_{k=1}^{n} Y_k\right]\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(Y_k) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \operatorname{cov}(Y_i, Y_j)\\ &= np^2(1-p^2) + 2\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{cov}(Y_k, Y_{k+1})\end{aligned}$$
   En effet, si $i < j$ mais que $j \neq i+1$, alors Y_i et Y_j sont indépendantes (car ne dépendent pas des mêmes variables X_k). Toutes les covariances sont donc nulles à part celles des couples (Y_k, Y_{k+1}).
   De plus,
   $$\begin{aligned}\operatorname{cov}(Y_k, Y_{k+1}) &= \mathbb{E}[Y_k Y_{k+1}] - \mathbb{E}[Y_k]\mathbb{E}[Y_{k+1}]\\ &= \mathbb{E}[X_k X_{k+1}^2 X_{k+2}] - p^2.p^2\\ &= \mathbb{E}[X_k]\mathbb{E}[X_{k+1}^2]\mathbb{E}[X_{k+2}] - p^4\\ &= p^3 - p^4\end{aligned}$$
   Donc finalement :
   $$\boxed{\mathbb{V}[S_n] = np^2(1-p)^2 + 2(n-1)p^3(1-p)}$$

12 En une journée donnée, le nombre aléatoire N de personnes qui vont venir dans un magasin suit une loi de Poisson de paramètre λ.
On fait une offre promotionnelle : chaque client pourra lancer une pièce équilibrée, s'il obtient Pile, il aura doit à une réduction à la caisse, s'il obtient Face, il paiera le prix normal. On note X le nombre de réductions données durant la journée, et $Y = N - X$ le nombre de clients payant le prix normal durant la journée.

1. Déterminer la loi de X, et la loi de Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$ (le nombre de personnes étant déjà quelconque, le nombre de réductions est donc un entier quelconque).
   De plus, remarquons que, sachant $[N = n]$, alors X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$:
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}_{[N=n]}(X = k) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$
   Ainsi en appliquant la formule des probabilités totales sur le SCE $([N = n])_{n\in\mathbb{N}}$, on a :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n] \cap [X = k]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}_{[N=n]}(X = k) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{k}\frac{1}{2^n} \quad (\text{si } n < k,\ [N = n] \cap [X = k] = \emptyset) \\
&= e^{-\lambda}\frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n}{(n-k)!} \\
&= e^{-\lambda}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{j+k}}{j!} = e^{-\lambda}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k}{k!}e^{\lambda/2} = e^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k}{k!}
\end{aligned}$$
   X suit donc une loi de Poisson de paramètre $\lambda/2$.

   De même, Y suit également une loi de Poisson de paramètre $\lambda/2$ (en échangeant les rôles des succès/échecs).
2. On a $X + Y = N$, mais pourtant X et Y vont être indépendantes ici.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = j]) &= \mathbb{P}([X = k] \cap [N = k + j]) \\
&= \mathbb{P}(N = k + j)\mathbb{P}_{[N=k+j]}(X = k) \\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!} \times \binom{k+j}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+j} \\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+j}}{j!k!}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+j} \\
&= e^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k}{k!}e^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^j}{j!} = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = j)
\end{aligned}$$
   Ainsi, X et Y sont bien indépendantes.

13 On lance infiniment une pièce qui fait Pile avec probabilité $p \in]0,1[$.

On note X_j le rang d'apparition du j-ième Pile.

1. Déterminer la loi de X_1, de X_2, puis de X_j.
2. On note pour $j \geqslant 2$, $Y_j = X_j - X_{j-1}$. Quelle est la loi de Y_j ? En déduire l'espérance et la variance de X_k.

1. (a) X_1 suit directement une loi géométrique de paramètre p.

$$X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*, \qquad \forall k \geqslant 1,\ \mathbb{P}(X_1 = k) = (1-p)^{k-1}p$$

(b) Déterminons la loi de X_2.
On a déjà clairement $X_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$.

- **Méthode 1**.
  En examinant la loi du couple (X_1, X_2).
  Pour tout $j \geqslant 1$ et $k \geqslant 2$, on a :
  - ⋆ si $k \leqslant j$, alors $\mathbb{P}([X_1 = j] \cap [X_2 = k]) = 0$ (le deuxième pile doit apparaître strictement après le premier).
  - ⋆ si $j < k$, alors :

$$\mathbb{P}([X_1 = j] \cap [X_2 = k]) = \mathbb{P}(F_1 \cap \cdots \cap F_{j-1} \cap P_j \cap F_{j+1} \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k) = p^2(1-p)^{k-2}$$

  Finalement, la loi du couple (X_1, X_2) est donnée par :

$$\mathbb{P}([X_1 = j] \cap [X_2 = k]) = \begin{cases} p^2(1-p)^{k-2} & \text{si } j < k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  On a alors, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}(X_2 = k) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = j] \cap [X_2 = k]) \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}([X_1 = j] \cap [X_2 = k]) \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} p^2(1-p)^{k-2} \\ &= (k-1)p^2(1-p)^{k-2} \end{aligned}$$

  Finalement :

$$\boxed{\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}(X_2 = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}}$$

- **Méthode 2**.
  Remarquons que $Y_2 = (X_2 - X_1)$ désigne le nombre de lancers supplémentaires nécessaires après le premier pile pour obtenir le premier pile suivant : Y_2 suit donc une loi géométrique de paramètre p,

indépendante de X_1. On a alors $X_2 = X_1 + Y_2$, avec X_1, Y_2 indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. Alors :

$$\begin{aligned}
\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}(X_2 = k) &= \mathbb{P}(X_1 + Y_2 = k) \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}([X_1 = j] \cap [Y_2 = k-j]) \quad \text{(par réunion incompatible)} \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_1 = j)\mathbb{P}(Y_2 = k-j) \quad \text{(par indépendance de } X_1 \text{ et } Y_2\text{)} \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} (1-p)^{j-1} p (1-p)^{k-j-1} p \\
&= (k-1)p^2(1-p)^{k-2}
\end{aligned}$$

- **Méthode 3**.
  Par un raisonnement direct avec dénombrement.
  En effet, notons pour tout j, la variable Z_j comptant le nombre de Pile obtenus sur les j premiers lancers. Alors, on sait que Z_j suit une loi binomiale $\mathcal{B}(j, p)$.
  De plus,
  $$[X_2 = k] = [Z_{k-1} = 1] \cap P_k$$
  En effet, $[X_2 = k]$ se réalise si et seulement si on obtient le deuxième Pile au k-ième lancer et si avant sur les $k-1$ premiers lancers, on avait exactement 1 Pile.
  Par indépendance des événements $[Z_{k-1} = 1]$ et P_k (ils ne concernent pas les mêmes lancers), on a donc :
  $$\mathbb{P}(X_2 = k) = \mathbb{P}(Z_{k-1} = 1)\mathbb{P}(P_k) = \binom{k-1}{1} p(1-p)^{(k-1)-1} \times p = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}$$

  Remarque : par un dénombrement direct, on peut dire que $[X_2 = k]$ est réalisé si et seulement si on a, sur les k premiers lancers de la pièce, exactement 2 Pile et $k-2$ Face, dont un Pile exactement au cours du k-ième lancer.
  Chaque issue réalisant $[X_2 = k]$ est donc de probabilité $p^2(1-p)^{k-2}$.
  Enfin, il y a exactement $k-1$ issues possibles, c'est-à-dire, autant de choix possibles pour la place du premier Pile. D'où : $\mathbb{P}(X_2 = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}$.

Finalement, quelque soit la méthode, on obtient :

$$\boxed{\forall k \in [\![2, +\infty[\![,\ \mathbb{P}(X_2 = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}}$$

(c) Pour la loi de X_j, en remarquant déjà que $X_j(\Omega) = [\![j, +\infty[\![$, en généralisant la méthode 3 précédente, on a :

$$\boxed{\forall k \in [\![j, +\infty[\![, \quad \mathbb{P}(X_j = k) = \binom{k-1}{j-1} p^j (1-p)^{k-j}}$$

En effet, notons pour tout i, la variable Z_i comptant le nombre de Pile obtenus sur les i premiers lancers. Alors, on sait que Z_i suit une loi binomiale $\mathcal{B}(i, p)$.
De plus,
$$[X_j = k] = [Z_{k-1} = j-1] \cap P_k$$
En effet, $[X_j = k]$ se réalise si et seulement si on obtient un Pile (le j-ième) au k-ième lancer et si avant sur les $k-1$ premiers lancers, on avait exactement $j-1$ Pile.

Par indépendance des événements $[Z_{k-1} = j-1]$ et P_k (ils ne concernent pas les mêmes lancers), on a donc :

$$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(Z_{k-1} = j-1)\mathbb{P}(P_k) = \binom{k-1}{j-1} p^{j-1}(1-p)^{(k-1)-(j-1)} \times p = \binom{k-1}{j-1} p^j (1-p)^{k-j}$$

2. Comme expliqué dans la méthode 2 précédente, Y_j désigne le nombre de lancers nécessaires après le $(j-1)$-ième Pile, pour obtenir le premier succès (le premier Pile qui suit). Ainsi, Y_j suit une loi géométrique de paramètre p, et les différentes variables Y_j sont mutuellement indépendantes.
   On a alors :

$$X_j = X_1 + (X_2 - X_1) + (X_3 - X_2) + \cdots + (X_j - X_{j-1}) = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_j$$

   On a alors par linéarité :

$$\mathbb{E}[X_j] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{j} Y_k\right] = \sum_{k=1}^{j} \mathbb{E}[Y_k] = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{p} = \boxed{\frac{j}{p}}$$

   et par indépendance des variables :

$$\mathbb{V}[X_j] = \mathbb{V}\left[\sum_{k=1}^{j} Y_k\right] = \sum_{k=1}^{j} \mathbb{V}[Y_k] = \sum_{k=1}^{j} \frac{1-p}{p^2} = \boxed{\frac{j(1-p)}{p^2}}$$

14 On dispose de n dés équilibrés à six faces. On souhaite réaliser un maximum de « 6 » avec ces dés, en les lançant trois fois au maximum. On lance donc tous les dés une fois, si certains dés font un 6 on les écarte, on ne relance que les autres, parmi lesquels on peut conserver les dés qui font un 6, puis on ne relance une troisième fois que les dés qui n'ont pas encore fait 6 pour tenter une dernière fois.
On note X le nombre de 6 apparus au premier essai, Y le nombre de 6 apparus au deuxième tour, et Z le nombre de 6 apparus lors du troisième lancer, et on note $S = X + Y + Z$ le nombre de 6 au total réussis sur le jeu.
Donner la loi de X, la loi de Y et la loi de Z. Que vaut $\mathbb{E}[S]$? X, Y, Z sont-elles indépendantes ?

1. X suit directement une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$, puisque X compte les succès sur n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, toutes de même probabilité de succès 1/6.
$$X(\Omega) = [\![0, n]\!], \quad \forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$
2. Y suit aussi une loi binomiale, mais de loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{5}{36}\right)$, puisque Y compte sur les n dés du départ, ceux qui vont avoir Echec puis Succès, chacun de probabilité de succès $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$.
$$Y(\Omega) = [\![0, n]\!], \quad \forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{5}{36}\right)^k\left(\frac{31}{36}\right)^{n-k}$$
Remarque : voir plus bas pour une preuve par calcul
3. Sur le même modèle, Z suit aussi une loi binomiale, mais de loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{5^2}{6^3}\right)$, puisque Z compte sur les n dés du départ, ceux qui vont avoir Echec puis Echec puis Succès, chacun de probabilité de succès $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$.
$$Z(\Omega) = [\![0, n]\!], \quad \forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(Z = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{5^2}{6^3}\right)^k\left(1 - \frac{5^2}{6^3}\right)^{n-k}$$
4. Par linéarité de l'espérance, on a
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S] &= \mathbb{E}[X + Y + Z] \\ &= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Z] \\ &= \frac{n}{6} + \frac{5n}{6^2} + \frac{5^2 n}{6^3} \\ &= \frac{n}{6}\left(1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2\right) \\ &= \frac{n}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3}{1 - \frac{5}{6}} \\ &= \boxed{n\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3\right)}\end{aligned}$$
5. X, Y, Z ne sont pas indépendantes puisque déjà X et Y ne le sont pas.
On a en effet $\mathbb{P}(X = n) \neq 0$, $\mathbb{P}(Y = n) \neq 0$, mais $\mathbb{P}(X = n, Y = n) = 0$.

Preuve du 2. par le calcul

On a bien $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$, tout simplement parce que si $X = 0$, alors on relance les n dés au deuxième essai et donc toutes les valeurs entre 0 et n sont possibles.

De plus, remarquons que, sachant $[X = k]$, alors Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n-k, \dfrac{1}{6}\right)$ (car si $[X = k]$ est réalisé, alors on relance $n - k$ dés ensuite, donc on compte les succès sur $n - k$ épreuves de Bernoulli lors du second tour).

Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = j) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = j]) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}_{[X=k]}(Y = j) \\
&= \sum_{k=0}^{n-j} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}_{[X=k]}(Y = j) \qquad (\text{car } \mathbb{P}_{[X=k]}(Y = j) \neq 0 \text{ lorsque } 0 \leqslant j \leqslant n-k \iff k \leqslant n-j) \\
&= \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{1}{6}\right)^{j} \left(\frac{5}{6}\right)^{(n-k)-j} \\
&= \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{1}{6}\right)^{k+j} \left(\frac{5}{6}\right)^{2n-2k-j} \\
&= \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n}{j} \binom{n-j}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^{k+j} \left(\frac{5}{6}\right)^{2n-2k-j} \\
&= \binom{n}{j} \left(\frac{1}{6}\right)^{j} \left(\frac{5}{6}\right)^{j} \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \left(\frac{5^2}{6^2}\right)^{(n-j)-k} \\
&= \binom{n}{j} \left(\frac{5}{6^2}\right)^{j} \left(\frac{1}{6} + \frac{5^2}{6^2}\right)^{n-j} \\
&= \binom{n}{j} \left(\frac{5}{6^2}\right)^{j} \left(\frac{31}{36}\right)^{n-j} \\
&= \binom{n}{j} \left(\frac{5}{6^2}\right)^{j} \left(1 - \frac{5}{6^2}\right)^{n-j}
\end{aligned}$$

Donc on a bien que Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{5}{6^2}\right)$.

15 Soient X et N deux variables aléatoires discrètes. On appelle espérance conditionnelle de X sachant $[N=n]$ (lorsqu'elle existe) :

$$\mathbb{E}[X|N=n] = \sum_{k\in X(\Omega)} k\mathbb{P}_{[N=n]}(X=k)$$

On admet que lorsque pour tout n de $N(\Omega)$, $\mathbb{E}[X|N=n]$ existe et que la série $\sum_n \mathbb{E}[X|N=n]\mathbb{P}(N=n)$ converge, alors X admet une espérance et on a :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n\in N(\Omega)} \mathbb{E}[X|N=n]\mathbb{P}(N=n)$$

(Ce résultat s'appelle le Théorème de l'espérance totale).
Exemple d'application: On dispose d'une pièce qui fait Pile avec probabilité p et Face avec probabilité $1-p$. On la lance jusqu'à obtenir le premier Pile (on note le rang du premier pile N), puis on relance la pièce autant de fois et on compte le nombre de Pile sur cette deuxième série de lancers, on note ce nombre X.
Par exemple, si on a obtenu le premier pile au rang 7, on peut relancer la pièce 7 fois et on compte le nombre de Pile sur les 7 lancers. Si on a obtenu le premier pile au rang 16, on relance 16 fois et on compte le nombre de piles sur les 16 lancers.

1. Quelle est la loi de N ?
2. Que vaut $X(\Omega)$? Préciser $\mathbb{P}(X=0)$.
3. X et N sont-elles indépendantes ?
4. Montrer que si $n \in \mathbb{N}(\Omega)$, alors $\mathbb{E}[X|N=n] = np$.
5. En utilisant le théorème de l'espérance totale (question 1), montrer que $\mathbb{E}[X] = 1$.

1. N suit une loi géométrique de paramètre p.
2. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ (tout entier k est une valeur possible pour k).
   De plus, on a :
   $$\mathbb{P}(X=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n, X=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}_{[N=n]}(X=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1}p \times (1-p)^n = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2}$$
3. On a $\mathbb{P}(N=1) = p$, $\mathbb{P}(N=1, X=0) = \mathbb{P}(N=1) \times \mathbb{P}_{[N=1]}(X=0) = p(1-p)$, mais $\mathbb{P}(N=1)\mathbb{P}(X=0) \neq p(1-p)$.
4. On sait que $(X|[N=n])$ suit une loi binomiale de paramètre (n,p), donc $\mathbb{E}[X|N=n] = np$.
5. On a donc :
   $$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[X|N=n]\mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} np(1-p)^{n-1}p = p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} = p^2 \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} = 1$$
   Ainsi, $\mathbb{E}[X] = 1$.

   Ce résultat est plutôt logique car, par exemple si on obtient le premier pile au bout de 50 lancers, si on recommence exactement 50 lancers dans les mêmes conditions, on peut supposer que le premier pile arrivera autour du 50-ième lancer également, donc en moyenne on aura sûrement obtenu autant de lancers que sur les 50 premiers lancers, à savoir un Pile.

16 On considère une succession de lancers pour une pièce équilibrée. Pour tout $i \geqslant 1$, on note $X_i = 1$ lorsque la pièce donne Pile puis Face aux lancers i et $i+1$, et $X_i = 0$ sinon. On note alors $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, le nombre de fois où on obtient Pile suivi de Face sur les $n+1$ premiers lancers.

1. Déterminer la loi de X_i pour tout $i \geqslant 1$.
2. Pour $n \geqslant 1$, calculer $\mathbb{E}[S_n]$ et $\mathbb{V}[S_n]$.
3. Pour $n \geqslant 1$, déterminer $\mathbb{P}(S_n = 0)$.

1. Soit $i \geqslant 1$. On a $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$ d'après l'énoncé, donc X_i suit une loi de Bernoulli.
   De plus,
   $$\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(P_i \cap F_{i+1}) = \mathbb{P}(P_i)\mathbb{P}(F_{i+1}) = \frac{1}{4}$$
   Ainsi, X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/4$.
2. Par linéarité de l'espérance, on a directement que :
   $$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4} = \frac{n}{4}$$
   Les X_i ne sont a priori pas indépendantes (puisque X_i et X_{i+1} dépendent toutes les deux du lancer $i+1$). On a donc :
   $$\mathbb{V}[S_n] = \mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}[X_i] + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \operatorname{cov}(X_i, X_j) = \frac{3n}{16} + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$
   Cependant X_i et X_j sont indépendantes dès que $|i-j| \geqslant 2$ (car dans ce cas, X_i et X_j ne dépendent pas des mêmes lancers). Ainsi, lorsque $i < j$, on a $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = 0$ dès que $j \geqslant i+2$.
   Enfin,
   $$\operatorname{cov}(X_i, X_{i+1}) = \mathbb{E}[X_i X_{i+1}] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_{i+1}] = 0 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{-1}{16}$$
   (en effet, $X_i X_{i+1}$ est toujours nul car on ne peut pas avoir $[X_i = 1]$ et $[X_{i+1} = 1]$ en même temps).
   Finalement :
   $$\mathbb{V}[S_n] = \frac{3n}{16} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{cov}(X_i, X_{i+1}) = \frac{3n}{16} + 2(n-1)\left(-\frac{1}{16}\right) = \frac{n+2}{16}$$
3. $[S_n = 0]$ se réalise si et seulement si on obtient jamais de Pile suivi de Face au cours des $n+1$ premiers lancers. L'événement contraire consiste à avoir soit que des Pile, soit un Face puis que des Pile, soit deux Face puis que des Pile, ..., soit que des Face. L'événement contraire de $[S_n = 0]$ est donc la réunion de $n+2$ événements (selon le nombre de Face qui précèdent les Pile, pouvant aller de 0 à $n+1$), tous de probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ On a donc :
   $$\mathbb{P}(S_n = 0) = 1 - (n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}$$

17 On dispose de n dés équilibrés à six faces qu'on lance une fois. On note alors pour $i \in [\![1,6]\!]$, X_i le nombre de dés ayant donné i. On note également S la somme obtenue par les numéros sur les dés.

1. Quelle est la loi de X_i ? Déterminer $\mathbb{E}[S]$.
2. Que vaut la variance de S ?

1. Chaque X_i suit une loi binomiale de paramètre $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$.
   On sait donc alors que pour tout $i \geqslant 1$, $\mathbb{E}[X_i] = \frac{n}{6}$.
   De plus, on a :
   $$S = \sum_{i=1}^{6} iX_i = X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 + 5X_5 + 6X_6$$
   Par linéarité de l'espérance, on a alors :
   $$\mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^{6} i\mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{6} i\frac{n}{6} = \frac{n}{6} \times \frac{6 \times 7}{2} = \frac{7n}{2}$$

2. Les X_i ne sont clairement pas indépendantes, puisque, si $i \neq j$, $\mathbb{P}(X_i = n, X_j = n) = 0$, mais $\mathbb{P}(X_i = n) \neq 0$ et $\mathbb{P}(X_j = n) \neq 0$.
   On a donc :
   $$\mathbb{V}[S] = \mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^{6} iX_i\right] = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{V}[iX_i] + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 6} \mathrm{cov}(iX_i, jX_j) = \sum_{i=1}^{6} i^2\mathbb{V}[X_i] + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 6} ij\mathrm{cov}(X_i, X_j)$$
   Si $i < j$, calculons $\mathrm{cov}(X_i, X_j)$.
   Remarquons que $X_i + X_j$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{2}{6}\right)$, puisque $X_i + X_j$ compte le nombre dés qui ont obtenu i ou j. On a donc :
   $$\mathbb{V}[X_i + X_j] = n.\frac{1}{3}.\frac{2}{3} = \frac{2n}{9}$$
   mais aussi
   $$\mathbb{V}[X_i + X_j] = \mathbb{V}[X_i] + \mathbb{V}[X_j] + 2\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \frac{5n}{18} + 2\mathrm{cov}(X_i, X_j)$$
   donc :
   $$\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \frac{n}{9} - \frac{5n}{36} = -\frac{n}{36}$$
   Finalement :
   $$\mathbb{V}[S] = \frac{5n}{36}\sum_{i=1}^{6} i^2 - \frac{n}{18}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 6} ij$$
   Or, $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} i^2 = \frac{6.7.13}{6} = 91$
   et $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 6} ij = \sum_{j=2}^{6} j\left(\sum_{i=1}^{j-1} i\right) = \sum_{j=2}^{6} j\frac{(j-1)j}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{6}(j^3 - j^2) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{6}(j^3 - j^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{6^2.7^2}{4} - \frac{6.7.13}{6}\right) = 175$
   Donc :
   $$\mathbb{V}[S] = \frac{5.91.n}{36} - \frac{n}{18}(175) = \frac{35n}{12}$$

18

Un joueur A lance une pièce (qui fait pile avec probabilité $p \in]0,1[$), et si le rang du 1er Pile est égal à une valeur k, alors le joueur A demande au joueur B de choisir un entier au hasard entre 1 et k.
On note X le rang du 1er pile de la pièce lancée par le joueur A, et on note Y le nombre choisi par le joueur B.

1. Déterminer la loi de X, puis la loi de Y.
2. Que vaut l'espérance de Y ?

1. La loi de X est géométrique de paramètre p (on reconnaît le rang du premier succès dans un schéma de Bernoulli).
$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p$$
Le nombre X pouvant être quelconque dans $\mathbb{N}^*$, alors le nombre Y choisit par le joueur B peut lui également être quelconque dans $\mathbb{N}^*$:
$$Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$$
De plus, on sait que, sachant $[X = k]$, alors Y suit une loi uniforme sur $[\![1, k]\!]$:
$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}_{[X=k]}(Y = j) = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Pour tout $j \geqslant 1$, en appliquant la formule des probabilités totales au SCE $([X = k])_{k \geqslant 1}$, on a donc :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = j) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = j]) = \sum_{k=j}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}_{[X=k]}(Y = j) \\ &= \sum_{k=j}^{+\infty} (1-p)^{k-1}p\frac{1}{k} = \boxed{p\sum_{k=j}^{+\infty} \frac{(1-p)^{k-1}}{k}} \end{aligned}$$

2. Remarquons qu'on a toujours $Y \leqslant X$. Donc puisque X admet une espérance, alors Y en admet une également. On a alors :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \sum_{j=1}^{+\infty} j\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} j \left(p\sum_{k=j}^{+\infty} \frac{(1-p)^{k-1}}{k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{p(1-p)^{k-1}}{k} \left(\sum_{j=1}^{k} j \right) \right) \quad \text{par interversion des sommes} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+1)}{2}(1-p)^{k-1}p = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+1)}{2}\mathbb{P}(X = k) \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{X+1}{2}\right] \quad \text{par théorème de transfert} \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}[X] + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{19}}$ Un joueur A lance une pièce (qui fait pile avec probabilité $p \in]0,1[$), et si le nombre de Face avant le 2ème Pile est égal à une valeur k, alors le joueur A demande au joueur B de choisir un entier au hasard entre 0 et k.
On note X le nombre de Face avant le 2ème Pile de la pièce lancée par le joueur A, et on note Y le nombre choisi par le joueur B.

1. Déterminer la loi de X, puis la loi de Y.
2. Que vaut l'espérance de Y ?

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Notons P_k la pièce donne Pile au lancer k, et notons Z_n le nombre de Piles effectués sur les n premiers lancers. La variable Z_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(Z_{k+1} = 1 \cap P_{k+2}) = \mathbb{P}(Z_{k+1} = 1)\mathbb{P}(P_{k+2}) = \binom{k+1}{1} p^1 (1-p)^{(k+1)-1} \times p = \boxed{(k+1)p^2(1-p)^k}$$

   On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Sachant $[X = k]$, Y suit une loi uniforme sur $[\![0,k]\!]$. On a donc pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{k=j}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}_{[X=k]}(Y=j) = \sum_{k=j}^{+\infty} (k+1)p^2(1-p)^k \times \frac{1}{k+1} = \sum_{k=j}^{+\infty} p^2(1-p)^k = \boxed{p(1-p)^j}$$

2. Remarquons simplement que $Y+1$ suit une loi géométrique de paramètre p, donc $\mathbb{E}[Y] = \dfrac{1}{p} - 1$.

20 Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On prélève une poignée « aléatoire » de jetons. On note N le nombre de jetons obtenus, S la somme des points des jetons de la poignée. Si la poignée est vide, on note $S = 0$.

1. On suppose que toutes les poignées sont équiprobables.
   (a) Déterminer la loi de N et donner son espérance.
   (b) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note $X_k = 1$ si la poignée contient le jeton k et $X_k = 0$ sinon. Déterminer la loi de X_k.
   (c) Écrire S en fonction des X_k. En déduire $\mathbb{E}(S)$.
   (d) Les X_k sont-elles indépendantes ? Que vaut $cov(X_i, X_j)$?
2. On suppose que N est une variable aléatoire uniforme sur $[\![0, n]\!]$.
   (a) Déterminer $\mathbb{E}(N)$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(X_k = 1|N = j)$ et en déduire la loi de X_k.
   (c) Les X_k sont-elles indépendantes ? Que vaut $cov(X_i, X_j)$?

1. Il y a 2^n poignées possibles puisqu'il y a n jetons.
   (a) Si on suppose toutes les poignées équiprobables, chaque poignée a une probabilité de $\dfrac{1}{2^n}$ d'être choisie.
   On a $N(\Omega) = [\![0, n]\!]$ puisqu'il peut y avoir un nombre de jetons quelconques dans la poignée.
   De plus, il y a $\dbinom{n}{k}$ possibilités pour obtenir une poignée de k éléments, donc :
   $$\mathbb{P}(N = k) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$$
   On reconnaît donc une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$, et donc $\mathbb{E}[N] = \frac{n}{2}$.
   (b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Puisque $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$, X_k suit donc une loi de Bernoulli.
   De plus, il y a 2^{n-1} poignées possibles (parmi les 2^n) qui contiennent le jeton numéro k (il suffit de choisir la poignée qui accompagne le jeton k, parmi les $n - 1$ jetons restants). Ainsi :
   $$\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$
   Chaque X_k suit donc une loi de Bernoulli de paramètre 1/2.
   (c) $S = \sum\limits_{k=1}^{n} kX_k$, donc par linéarité de l'espérance,
   $$\mathbb{E}(S) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k = \boxed{\frac{n(n+1)}{4}}$$
   (d) On sait que deux variables de Bernoulli X_i et X_j sont indépendantes si et seulement si les événement $[X_i = 1]$ et $[X_j = 1]$ sont indépendants.
   Ici, pour $i \neq j$, on a $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_j = 1) = \dfrac{1}{2}$.
   De plus,
   $$\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4}$$
   car il y a 2^{n-2} poignées qui contiennent à la fois les jetons i et j (il suffit de choisir la poignée qui les accompagne parmi les $n - 2$ jetons restants).

On a donc bien $\mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(X_j = 1) = \mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1])$ pour $i \neq j$.
Et de même, on pourrait montrer que si $1 < i_1 < i_2 < \cdots < i_m < n$, on a $\mathbb{P}([X_{i_1} = 1] \cap [X_{i_2} = 1] \cap \cdots \cap [X_{i_m} = 1]) = \frac{1}{2^m} = \mathbb{P}(X_{i_1} = 1)\mathbb{P}(X_{i_2} = 1) \cdots \mathbb{P}(X_{i_m} = 1)$.
Ainsi, les variables X_k sont mutuellement indépendantes ici.
Par conséquence, on a $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0$ si $i \neq j$.

2. (a) Si N suit une loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$ à présent, cela signifie que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(N = k) = \frac{1}{n+1}$$

On en déduit que :

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(N = k) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{n+1} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}$$

(b) Si on sait que $[N = j]$ est réalisé, alors la poignée comporte j jetons, donc $\mathbb{P}(X_k = 1 | N = j) = \frac{j}{n}$ (c'est évident si $j = 0$, et si on prend une poignée de j jetons avec $j \geqslant 1$, il y a $\binom{j}{n}$ poignées possibles, et $\binom{n-1}{j-1}$ poignées possibles contenant le jeton numéro k, donc :

$$\mathbb{P}(X_k = 1 | N = j) = \frac{\binom{n-1}{j-1}}{\binom{n}{j}} = \frac{\binom{n-1}{j-1}}{\frac{n}{j}\binom{n-1}{j-1}} = \frac{j}{n}$$

On en déduit que :

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(N = j)\mathbb{P}_{[N=j]}(X_k = 1) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n+1}\frac{j}{n} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{j=0}^{n} j = \frac{1}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, ici encore, X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

(c) Ici sur le même modèle que précédemment :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(N = k)\mathbb{P}_{[N=k]}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=2}^{n} \frac{\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}} \\
&= \frac{1}{(n+1)n(n-1)} \sum_{k=2}^{n} k(k-1) = \frac{1}{n(n+1)(n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{1}{n-1} \left(\frac{2n+1}{6} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) \neq \mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(X_j = 1)$, donc les variables X_k ne sont pas indépendantes.

Comme étudié précédemment, pour $i \neq j$,

$$\mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \frac{1}{3}$$

donc pour $i \neq j$,

$$\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$