

1 Pour chaque variable aléatoire X suivante, donner $X(\Omega)$, donner la loi de X , calculer son espérance et sa variance.

1. X_1 = le nombre de Pile obtenus en lançant 2 pièces équilibrées.
2. X_2 = le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche lorsque l'on tire sans remise des boules dans une urne contenant 2 boules noires et 2 boules blanches
3. X_3 = le produit de 3 nombres entiers tirés uniformément entre 0 et 2.

1. $X_1(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

En notant P_k : « obtenir Pile au k -ième lancer », on a par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(F_1 \cap F_2) = \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2) = \frac{1}{4}$$

et comme $([X_1 = 0], [X_1 = 1], [X_1 = 2])$ forme un système complet d'événements, on a :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0) - \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$$

La loi de X_1 est donc donnée par :

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X_1 = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$\mathbb{E}[X_1] = \sum_{k=0}^2 k\mathbb{P}(X_1 = k) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1.$$

Par théorème de transfert, $\mathbb{E}[X_1^2] = \sum_{k=0}^2 k^2\mathbb{P}(X_1 = k) = 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

On en déduit que $\mathbb{V}[X_1] = \mathbb{E}[X_1^2] - (\mathbb{E}[X_1])^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

2. $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.

En notant B_k (respectivement N_k) : « obtenir une boule blanche (resp. noire) au k -ième lancer », on a :

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(N_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(B_2) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

et comme $([X_2 = 1], [X_2 = 2], [X_2 = 3])$ forme un système complet d'événements, on a :

$$\mathbb{P}(X_2 = 3) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 1) - \mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{1}{6}$$

La loi de X_2 est donc donnée par :

k	1	2	3
$\mathbb{P}(X_2 = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$\mathbb{E}[X_2] = \sum_{k=1}^3 k\mathbb{P}(X_2 = k) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}.$$

Par théorème de transfert, $\mathbb{E}[X_2^2] = \sum_{k=1}^3 k^2\mathbb{P}(X_2 = k) = 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{3} + 9 \times \frac{1}{6} = \frac{10}{3}$.

On en déduit que $\mathbb{V}[X_2] = \mathbb{E}[X_2^2] - (\mathbb{E}[X_2])^2 = \frac{10}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

3. $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2, 4, 8\}$.

On peut supposer que l'expérience (choisir trois nombres entiers entre 0 et 2) est modélisée par

$$\Omega = \left\{ (i, j, k), \text{ avec } i, j, k \in \{0, 1, 2\} \right\} = \{0, 1, 2\}^3 \quad \implies \quad \text{Card}(\Omega) = 3^3 = 27$$

et on est en situation d'équiprobabilité sur cet univers. Chaque issue apparaît avec probabilité $1/27$.

• On a : $[X_3 = 8] = \{(2, 2, 2)\}$, donc :

$$\mathbb{P}(X_3 = 8) = \frac{1}{27}$$

• On a : $[X_3 = 4] = \{(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)\}$, donc :

$$\mathbb{P}(X_3 = 4) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

• On a $[X_3 = 2] = \{(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$, donc :

$$\mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

• On a $[X_3 = 1] = \{(1, 1, 1)\}$, donc :

$$\mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{1}{27}$$

• Enfin, puisque $([X_3 = 0], [X_3 = 1], [X_3 = 2], [X_3 = 4], [X_3 = 8])$ forme un SCE, on a :

$$\mathbb{P}(X_3 = 0) = 1 - \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27} = \frac{19}{27}$$

La loi de X_3 est donc donnée par :

k	0	1	2	4	8
$\mathbb{P}(X_3 = k)$	$\frac{19}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

$$\mathbb{E}[X_3] = \sum_{k \in X_3(\Omega)} k \mathbb{P}(X_3 = k) = 1 \times \frac{19}{27} + 2 \times \frac{1}{27} + 4 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{1}{27} = 1.$$

$$\text{Par théorème de transfert, } \mathbb{E}[X_3^2] = \sum_{k \in X_3(\Omega)} k^2 \mathbb{P}(X_3 = k) = 1 \times \frac{19}{27} + 4 \times \frac{1}{27} + 16 \times \frac{1}{9} + 64 \times \frac{1}{27} = \frac{125}{27}.$$

$$\text{On en déduit que } \mathbb{V}[X_3] = \mathbb{E}[X_3^2] - (\mathbb{E}[X_3])^2 = \frac{125}{27} - 1 = \frac{98}{27}$$

2 Un paquet de 10 cartes contient 5 as, 3 rois et 2 dames. Le tirage d'un as rapporte 5 points, celui d'un roi 2 points et celui d'une dame 1 point. Du paquet, on tire simultanément et au hasard 2 cartes. On désigne par X la variable égale au total des points marqués. Déterminer la loi de X , son espérance et son écart-type.

Tirer simultanément deux cartes revient finalement à les tirer l'une après l'autre sans remise.

Notons D_k (resp R_k, A_k) « obtenir une dame (resp un roi, resp un as) au k -ième tirage ».

Ici on a :

$$X(\Omega) = \{2, 3, 4, 6, 7, 10\}$$

- $[X = 2] = D_1 \cap D_2$ On a donc :

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}_{D_1}(D_2) = \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{90}$$

ou avec la formule $\frac{\text{Nombre de tirages avec 2 dames}}{\text{Nombre de tirages possibles}} = \frac{1}{45}$

- $[X = 4] = R_1 \cap R_2$ On a donc :

$$\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(R_2) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{90}$$

- $[X = 10] = A_1 \cap A_2$ On a donc :

$$\mathbb{P}(X = 10) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2) = \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{20}{90}$$

- $[X = 3] = (D_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap D_2)$ On a donc :

$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}_{D_1}(R_2) + \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(D_2) = \frac{2}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{12}{90}$$

- $[X = 6] = (D_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap D_2)$ On a donc :

$$\mathbb{P}(X = 6) = \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}_{D_1}(A_2) + \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(D_2) = \frac{2}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{20}{90}$$

- $[X = 7] = (R_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap R_2)$ On a donc :

$$\mathbb{P}(X = 7) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(A_2) + \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(R_2) = \frac{3}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{30}{90}$$

Finalement, la loi de X est donnée par :

k	2	3	4	6	7	10
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{2}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{6}{90}$	$\frac{20}{90}$	$\frac{30}{90}$	$\frac{20}{90}$

On en déduit que :

$$\mathbb{E}[X] = 2\frac{2}{90} + 3\frac{12}{90} + 4\frac{6}{90} + 6\frac{20}{90} + 7\frac{30}{90} + 10\frac{20}{90} = \frac{594}{90} = \frac{33}{5}$$

Par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}[X^2] = 4\frac{2}{90} + 9\frac{12}{90} + 16\frac{6}{90} + 36\frac{20}{90} + 49\frac{30}{90} + 100\frac{20}{90} = \frac{594}{90} = \frac{4402}{90}$$

donc :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{4402}{90} - \left(\frac{33}{5}\right)^2 = \frac{1204}{225}$$

3 On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs jusqu'à ce qu'il ne reste dans l'urne plus que deux couleurs différentes. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.

On a $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$.

Notons R_k (resp. N_k , J_k) l'événement « on obtient une boule rouge (resp. noire, resp. blanche) au k -ième tirage ».

- $[X = 1]$ se réalise si et seulement si on tire une boule rouge dès le premier tirage. On a donc :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(R_1) = \frac{1}{6}.$$

- $[X = 2]$ se réalise si et seulement si en deux tirages on vide l'urne, donc soit avec une boule rouge au deuxième tirage, soit avec les deux boules noires.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 2) &= \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(J_1 \cap R_2) \\ &= \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(N_2) + \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(R_2) + \mathbb{P}(J_1)\mathbb{P}_{J_1}(R_2) \\ &= \left(\frac{2}{6} \times \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{6} \times \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{3}{6} \times \frac{1}{5}\right) = \frac{7}{30} \end{aligned}$$

- $[X = 4]$ se réalise si et seulement si sur les trois premiers tirages on a tiré 1 boule noire et 2 boules jaunes. En effet, dans ce cas (et seulement dans ce cas) après le 3ème tirage, il reste 3 boules de couleurs différentes, et alors le jeu s'arrêtera après le 4ème tirage. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 4) &= \mathbb{P}(J_1 \cap J_2 \cap N_3) + \mathbb{P}(J_1 \cap N_2 \cap J_3) + \mathbb{P}(N_1 \cap J_2 \cap J_3) \\ &= \mathbb{P}(J_1)\mathbb{P}_{J_1}(J_2)\mathbb{P}_{J_1 \cap J_2}(N_3) + \mathbb{P}(J_1)\mathbb{P}_{J_1}(N_2)\mathbb{P}_{J_1 \cap N_2}(J_3) + \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(J_2)\mathbb{P}_{N_1 \cap J_2}(J_3) \\ &= \left(\frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{2}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4}\right) = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

- Enfin, puisque $([X = 1], [X = 2], [X = 3], [X = 4])$ forme un système complet d'événements, on a :

$$\mathbb{P}(X = 3) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) - \mathbb{P}(X = 4) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{7}{30} - \frac{3}{10} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

Finalement, la loi de X est donnée par :

k	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

On en déduit que :

$$\mathbb{E}[X] = 1 \frac{1}{6} + 2 \frac{7}{30} + 3 \frac{3}{10} + 4 \frac{3}{10} = \frac{82}{30} = \frac{41}{15}$$

Par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}[X^2] = 1 \frac{1}{6} + 4 \frac{7}{30} + 9 \frac{3}{10} + 16 \frac{3}{10} = \frac{258}{30} = \frac{43}{5}$$

donc :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{43}{5} - \left(\frac{41}{15}\right)^2$$

4 On effectue des lancers d'une pièce équilibrée. On note X le nombre de lancers de pièces nécessaires pour obtenir Pile pour la première fois (on admet que presque-sûrement on obtient au moins un Pile). Déterminer la loi de X , son espérance, sa variance.

Ici, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

- En notant P_j (resp. F_j) « obtenir Pile (resp. Face) au j -ième lancer », on a :

$$\star \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(P_1) = \frac{1}{2}.$$

- Pour tout $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k) \\ &= \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2) \dots \mathbb{P}(F_{k-1})\mathbb{P}(P_k) \quad (\text{par indépendance des lancers}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall k \geq 1, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^k}$$

- X admet une espérance si $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ converge (absolument). Ici, c'est bien le cas car on reconnaît directement une série géométrique dérivée convergente. On a donc :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

- X^2 admet une espérance par théorème de transfert si $\sum k^2\mathbb{P}(X = k)$ converge (absolument). Ici, on a :

$$\begin{aligned} \forall N \geq 1, \sum_{k=1}^N k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \sum_{k=1}^N (k(k-1) + k) \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

On reconnaît les sommes partielles de séries géométriques dérivées première et seconde convergentes, donc X^2 admet bien une espérance, et on a :

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 6$$

Ainsi, X admet bien une variance qui vaut :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 6 - 2^2 = 2$$

5 Soit n un entier strictement supérieur à 3. On considère n personnes qui jouent à « Pile » ou « Face » avec une pièce équilibrée et de façon indépendante.

1. Soit A l'événement : « une seule personne exactement obtient un résultat différent des $(n-1)$ autres personnes ». Calculer la probabilité de A .
2. Un jeu consiste à réitérer l'expérience précédente (appelée « partie ») jusqu'à la réalisation de A . On note X la variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} désignant le nombre de parties jouées si le jeu s'arrête et prenant la valeur 0 sinon.
Donner la loi de X , son espérance et sa variance.

1. Ici $\Omega = \{P, F\}^n$ (une issue est une liste de n résultats de Pile ou Face). On a donc $\text{Card}(\Omega) = 2^n$.
Le nombre d'issues favorables à A est $2 \times n$. En effet, les listes favorables à A sont :

$$(P, F, F, \dots, F, F), (F, P, F, \dots, F, F), (F, F, P, \dots, F, F), (F, F, F, \dots, F, P)$$

et

$$(F, P, P, \dots, P, P), (P, F, P, \dots, P, P), (P, P, F, \dots, P, P), (P, P, P, \dots, P, F)$$

On a donc par équiprobabilité sur Ω :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

2. $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{0\} = \mathbb{N}$.

Notons A_k l'événement « on réalise l'événement A lors de la k -ième partie ». Si la k -ième partie a lieu, alors l'événement A_k se réalise avec la même probabilité que A .

- $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(A_1) = \frac{n}{2^{n-1}}$.
- $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap A_2) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_2) = \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right) \left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)$.
- Pour tout $k \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k) \\ &= \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \cdots \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-2}}}(\overline{A_{k-1}})\mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}}}(A_k) \\ &= \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)^{k-1} \left(\frac{n}{2^{n-1}}\right). \end{aligned}$$

En notant $p = \frac{n}{2^{n-1}}$, on a alors :

$$\boxed{\forall k \geq 1, \mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1}p}$$

- Comme $([X = k])_{k \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, on en déduit que :

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1 - p \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - p)^{k-1} = 1 - p \frac{1}{1 - (1 - p)} = 1 - 1 = 0$$

Presque-sûrement le jeu s'arrête. Ici, l'événement $[X = 0]$ est négligeable.

- Espérance de X ?

On regarde si $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ converge (absolument). Ici, c'est le cas car on reconnaît une série géométrique dérivée, on a :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} k(1 - p)^{k-1}p = p \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k(1 - p)^{k-1} \right) = p \times \frac{1}{\left(1 - (1 - p)\right)^2} = \boxed{\frac{1}{p}}$$

- Variance de X ?

On regarde déjà si X admet un moment d'ordre 2, autrement dit (théorème de transfert) si $\sum k^2 \mathbb{P}(X = k)$ converge (absolument). Ici, en remarquant que $k^2 = k(k-1) + k$, on a :

$$k^2 \mathbb{P}(X = k) = k(k-1)(1-p)^{k-1}p + k(1-p)^{k-1}p$$

on a donc la somme de deux termes généraux de séries convergentes (géométriques dérivées), donc X^2 admet bien une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(k(k-1)(1-p)^{k-1}p + k(1-p)^{k-1}p \right) = p(1-p) \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\ &= p(1-p) \frac{2}{(1-(1-p))^3} + p \frac{1}{(1-(1-p))^2} \\ &= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Finalement, X admet bien une variance et :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2(1-p) + p - 1}{p^2} = \boxed{\frac{1-p}{p^2}}$$

6 On joue avec deux dés équilibrés à 6 faces. On jette un premier dé et on note sa valeur. On jette ensuite le deuxième dé jusqu'à ce qu'il indique le même numéro que le premier.
Soit X le nombre de fois qu'il faut lancer le deuxième dé pour qu'il indique le même numéro que le premier. Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.

On va admettre que, presque-sûrement, on obtient au moins une fois le même résultat avec le deuxième dé qu'avec le premier dé, ce qui permet de bien définir la variable aléatoire.

Dans ce cas, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

• **Loi de X ?**

Notons pour tout $j \geq 1$, S_j : « on obtient un succès au j -ième lancer du 2ème dé », (un succès étant d'obtenir le résultat du premier dé).

Alors pour tout $k \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \dots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k) \\ &= \mathbb{P}(\overline{S_1}) \mathbb{P}(\overline{S_2}) \dots \mathbb{P}_{\overline{S_1} \cap \dots \cap \overline{S_{k-2}}}(\overline{S_{k-1}}) \mathbb{P}_{\overline{S_1} \cap \dots \cap \overline{S_{k-1}}}(S_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall k \geq 1, \mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$$

Remarquons que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 1$, ainsi $([X = k])_{k \geq 1}$ forme bien un système quasi-complet d'événements. Presque-sûrement, on obtiendra au moins une fois avec le deuxième dé, le même résultat que le premier dé.

• **Espérance de X ?**

On regarde si $\sum k \mathbb{P}(X = k)$ converge (absolument). Ici, c'est le cas car on reconnaît une série géométrique dérivée, on a :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \right) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{6}\right)^2} = \boxed{6}$$

• **Variance de X ?**

On regarde déjà si X admet un moment d'ordre 2, autrement dit (théorème de transfert) si $\sum k^2 \mathbb{P}(X = k)$ converge (absolument). Ici, en remarquant que $k^2 = k(k-1) + k$, on a :

$$k^2 \mathbb{P}(X = k) = k(k-1) \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} + k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$$

on a donc la somme de deux termes généraux de séries convergentes (géométriques dérivées), donc X^2 admet bien une espérance et :

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{5}{36} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{5}{6}\right)^{k-2} + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{5}{36} \frac{2}{\left(1 - \frac{5}{6}\right)^3} + \frac{1}{6} \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{6}\right)^2} = 60 + 6 = 6 \times 11$$

Finalement, X admet bien une variance et :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 6 \times 11 - 6^2 = 6 \times 5 = \boxed{30}$$

7 On effectue des tirages au hasard dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , avec $n \geq 2$.

Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant ensuite remise dans l'urne.

On note N la variable aléatoire égale au numéro du tirage à l'issue duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

1. Déterminer $N(\Omega)$.
2. Pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, calculer $\mathbb{P}(N > k)$. En déduire la loi de N .

1. Au plus tôt, $N = 2$ (il faut au moins deux tirages pour obtenir une boule déjà obtenue).

Dans le pire des cas, $N = n + 1$, si on tire toutes les boules une fois (en n tirages), la $(n + 1)$ -ième boule tirée aura forcément été déjà tirée auparavant.

De plus, tous les cas intermédiaires sont possibles.

$$N(\Omega) = \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$$

2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Calculons $\mathbb{P}(N > k)$.

L'événement $[N > k]$ signifie qu'il faut strictement plus de k tirages pour obtenir une boule déjà obtenue auparavant.

Ainsi, $[N > k]$ se réalise si et seulement si, sur les k premiers tirages, on a obtenu k boules différentes.

Sur les k premiers tirages, on a n^k listes de résultats possibles (n possibilités à chaque tirage, il y a remise).

De plus, il y a $n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - k + 1)$ listes de résultats ayant k numéros distincts. Ainsi :

$$\mathbb{P}(N > k) = \frac{n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - k + 1)}{n^k} = \frac{n!}{n^k(n - k)!}$$

Remarquons que par exemple, $\mathbb{P}(N > 1) = \frac{n!}{n^1(n - 1)!} = 1$, ce qui est cohérent.

Pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = k) &= \mathbb{P}(N > k - 1) - \mathbb{P}(N > k) \\ &= \frac{n!}{n^{k-1}(n - k + 1)!} - \frac{n!}{n^k(n - k)!} \\ &= \frac{n!(k - 1)}{n^k(n - k + 1)!} \end{aligned}$$

et le résultat est vrai pour $k = n + 1$ également, puisque $[N = n + 1]$ se réalise si et seulement si on a n nombres différents sur les n premiers tirages, on a donc :

$$\mathbb{P}(N = n + 1) = \frac{n!}{n^n}$$

ce qui est valable avec la formule précédente.

Finalement,

$$\forall k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket, \mathbb{P}(N = k) = \frac{n!(k - 1)}{n^k(n - k + 1)!}$$

8 Soit $p \in]0, 1[$ et soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{p}{2}, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

Déterminer la loi de $Y = X^2$, son espérance et sa variance.

Puisque $\frac{p}{2} + \frac{p}{2} + (1-p) = 1$, on a $([X = -1], [X = 1], [X = 0])$ qui forme un système (quasi)-complet d'événements. On peut donc supposer que :

$$X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$$

- Puisque $Y = X^2$, on a $Y(\Omega) = \{0, 1\}$.
- $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X^2 = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.
- $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y^2 = 1) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = -1) = p$.

Puisque Y est finie, Y admet bien espérance et variance. Avec la loi obtenue précédemment, on a :

$$\mathbb{E}[Y] = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$$

Par théorème de transfert, on a :

$$\mathbb{E}[Y^2] = 1^2 \times p + 0^2 \times (1 - p) = p$$

donc

$$\mathbb{V}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

9 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer que : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X \geq k)$.

Déjà, remarquons que puisque X est finie, X admet bien une espérance.

1^{ère} méthode.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X] &= \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X = k) \\
 &= \sum_{k=1}^n k \left(\mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1) \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X \geq k) - \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X \geq k+1) \\
 &= \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X \geq k) - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)\mathbb{P}(X \geq k) \\
 &= \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X \geq k) - \sum_{k=2}^{n+1} k\mathbb{P}(X \geq k) + \sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}(X \geq k) \\
 &= 1\mathbb{P}(X \geq 1) - (n+1)\mathbb{P}(X \geq n+1) + \sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}(X \geq k) \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X \geq k) \quad (\text{en insérant le } \mathbb{P}(X \geq 1), \text{ et en remarquant que } \mathbb{P}(X \geq n+1) = 0)
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X \geq k)$$

2^{ème} méthode.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X \geq k) &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=k}^n \mathbb{P}(X = j) \right) \\
 &= \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} \mathbb{P}(X = j) \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^j \mathbb{P}(X = j) \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n j\mathbb{P}(X = j) \\
 &= \mathbb{E}[X]
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{E}[X]$$

10 Soit X une variable telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$,
$$\sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n).$$

2. Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X > n)$ converge. En déduire que, en cas d'existence,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$$

1. Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^n k \left(\mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X > k-1) - \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) + \sum_{k=0}^{n-1} k\mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n) \end{aligned}$$

2. Montrons à présent que :

$$\mathbb{E}[X] \text{ existe} \iff \sum \mathbb{P}(X > n) \text{ converge}$$

\Leftarrow Supposons que $\sum \mathbb{P}(X > n)$ converge. D'après l'égalité de la question 1, on a :

$$\sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X = k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$$

Ainsi, la suite $\left(\sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X = k) \right)_{n \geq 1}$ est croissante (somme partielle d'une série de termes positifs) et majorée, donc admet une limite finie. Ainsi, $\mathbb{E}[X]$ existe.

⇒ Supposons que X admette une espérance, i.e. que $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ admet une limite finie lorsque $n \rightarrow +\infty$.
D'après l'égalité de la question 1, on a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X = k) + n\mathbb{P}(X > n)} \quad (*)$$

Or, on a :

$$n\mathbb{P}(X > n) = n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = k)$$

et comme $\forall k \geq n+1$, on a $0 \leq n\mathbb{P}(X = k) \leq k\mathbb{P}(X = k)$, et que toutes les séries sont convergentes, on a alors :

$$0 \leq n\mathbb{P}(X > n) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \left(\mathbb{E}[X] - \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X = k) \right)$$

Par encadrement, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} n\mathbb{P}(X > n) = 0}$$

Finalement, d'après l'égalité (*), les deux termes du membre de droite admettent bien une limite finie lorsque $n \rightarrow +\infty$, donc le membre de gauche de (*) admet une limite finie aussi.

Ainsi, la série de terme général $\mathbb{P}(X > k)$ converge.

Finalement, on a bien l'équivalence voulue, et si on est bien dans le cas où $\mathbb{E}[X]$ existe, alors par passage à la limite dans l'égalité (*), on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k) = \mathbb{E}[X] + 0}$$

11 Une urne contient une boule noire et une boule blanche. On tire des boules de la façon suivante : si la boule est blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule noire ; si la boule est noire, le jeu s'arrête et on note X le nombre de tirages qui ont été effectués.

Dans le cas où on obtiendrait jamais la boule noire, on note $X = 0$.

- Déterminer la loi de X .
- Montrer que la variable $X + 1$ admet une espérance et donner sa valeur. En déduire l'espérance de X .

1. X peut prendre la valeur 0 (si on n'a jamais de boule noire), et X peut prendre chaque entier $k \geq 1$ (si on tire $k - 1$ fois une boule blanche, puis une boule noire). Ainsi $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

On notera dans la suite N_j (respectivement B_j) « la boule tirée au j -ième tirage est noire (resp. blanche) ».

- $[X = 1] = N_1$, donc $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(N_1) = \frac{1}{2}$.
- Pour tout $k \geq 2$, on a : $[X = k] = B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k$, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) \\ &= \mathbb{P}(B_1) \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \cdots \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(N_k) \quad (\text{par probas composées}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \dots \times \frac{1}{k} \times \frac{k}{k+1} = \frac{k}{(k+1)!} \end{aligned}$$

- Pour $[X = 0]$, on a $[X = 0] = \bigcap_{j=1}^{+\infty} B_j$, donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 0) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{+\infty} B_j\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^N B_j\right) \quad (\text{par corollaire du théorème limite monotone}) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(N+1)!} \quad (\text{par probas composées, similaire à précédemment}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on peut supposer que l'événement $[X = 0]$ est négligeable.

Finalement, en remarquant que la formule inclut bien également le cas $k = 1$ (et même le cas $k = 0$), on peut donc affirmer que :

$$\forall k \geq 0, \mathbb{P}(X = k) = \frac{k}{(k+1)!}$$

2. $X + 1$ admet une espérance si et seulement si $\sum_{k \geq 0} (k+1)\mathbb{P}(X = k)$ converge absolument (par théorème de transfert). Or, ici :

$$\forall k \geq 1, (k+1)\mathbb{P}(X = k) = (k+1) \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{(k-1)!} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 0$$

On reconnaît le terme général d'une série exponentielle, donc convergente. Ainsi, $X + 1$ admet bien une espérance, et

$$\mathbb{E}[X + 1] = \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = e$$

Donc par linéarité de l'espérance, X admet bien une espérance également, et :

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[(X + 1) - 1] = \mathbb{E}[X + 1] - 1 = e - 1$$

12 On lance simultanément deux dés équilibrés A et B . Le dé A porte le nombre « 1 » sur 4 faces et « -2 » sur les deux autres. Le dé B porte les nombres $-2, -1, 0, 1, 2, 3$.

1. On note X le résultat de A , Y le résultat de B , et $S = |X + Y|$. Déterminer la loi de X et de Y .
2. Déterminer la loi de S puis la loi du couple (X, S) . X et S sont-elles indépendantes ?

1. On a $X(\Omega) = \{-2, 1\}$ et par équiprobabilité des faces, on a $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(X = -2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
 $Y(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ et

$$\forall k \in \llbracket -2, 3 \rrbracket, \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{6}.$$

2. Remarquons que $S(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et que les lancers sont indépendants.

On a donc:

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(S = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

et la loi du couple (X, S) est:

$X \setminus S$	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
-2	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$

Les variables X et S sont indépendantes (on vérifie que $P(X = k)P(S = j) = P(X = k \cap S = j)$ pour tout $k \in X(\Omega)$ et tout $j \in S(\Omega)$).

13 On lance une pièce équilibrée deux fois de suite.

On note X (respectivement Y) le nombre de Pile obtenu au 1er (resp. 2ème) tirage.

1. Déterminer les lois de $S = X + Y$ et $D = X - Y$.
2. Déterminer la loi de (S, D) et calculer $cov(S, D)$.
3. S et D sont-elles indépendantes ?

1. Comme dans l'exercice 1 question 1, on a $S(\Omega) = \{0; 1; 2\}$.

La loi de S est donc donnée par :

k	0	1	2
$\mathbb{P}(S = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

On a $D(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$. La loi de D est donc donnée par :

k	-1	0	1
$\mathbb{P}(D = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

- 2.

$S \setminus D$	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{1}{4}$	0

$$cov(S, D) = E(SD) - E(S)E(D) = 0.$$

Les variables S et D sont non corrélées linéairement.

3. La position des 0 dans le tableau précédent indique que S et D ne sont pas indépendantes.

14 On considère deux urnes A et B et 4 boules : deux blanches et deux noires.

On choisit au hasard deux boules que l'on place dans l'urne A , les deux autres étant alors placées dans l'urne B . On effectue ensuite une suite de tirages de la façon suivante : à chaque tirage, on extrait au hasard une boule de chaque urne, puis on les remet après les avoir échangées.

On note X_0 le nombre de boules noires initialement dans l'urne A et pour tout $n \geq 1$, X_n le nombre de boules noires contenues dans l'urne A à l'issue de n tirages (donc juste avant le tirage suivant).

On note, pour tout entier $n \geq 0$: $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$, $q_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$ et $r_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$.

- Déterminer une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geq 1$:
$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \\ r_{n-1} \end{pmatrix}.$$
- On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer PQ . En déduire que P est inversible et préciser P^{-1} . Calculer $P^{-1}MP$. En déduire X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- En déduire que les trois suites $(p_n)_n$, $(q_n)_n$ et $(r_n)_n$ sont convergentes et déterminer leurs limites respectives.

1. En faisant un arbre on trouve:
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & 0 \\ 1 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $PQ = 12I_3$ donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{12}Q$.

Notons $D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{pmatrix}$

On sait que pour tout entier $n \geq 1$, $X_n = MX_{n-1} = \dots = M^n X_0 = (PDP^{-1})^n X_0 = PD^n P^{-1} X_0$

avec $PD^n P^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 + 4(-0,5)^n & 2 - 2(-0,5)^n & 2 + 4(-0,5)^n \\ 8 - 8(-0,5)^n & 8 + 4(-0,5)^n & 8 - 8(-0,5)^n \\ 2 + 4(-0,5)^n & 2 - 2(-0,5)^n & 2 + 4(-0,5)^n \end{pmatrix}.$

Si $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $X_n = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 + 4(-0,5)^n \\ 8 - 8(-0,5)^n \\ 2 + 4(-0,5)^n \end{pmatrix}$

Si $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $X_n = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 - 2(-0,5)^n \\ 8 + 4(-0,5)^n \\ 2 - 2(-0,5)^n \end{pmatrix}$

Si $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $X_n = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 + 4(-0,5)^n \\ 8 - 8(-0,5)^n \\ 2 + 4(-0,5)^n \end{pmatrix}$

3. Quelquesoit la situation initiale, les trois suites $(p_n)_n$, $(q_n)_n$ et $(r_n)_n$ sont convergentes de limite respectives $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}$ et $\frac{1}{6}$