**1** Déterminer les développements limités d'ordre 2 des fonctions suivantes au voisinage de 0 :

1. $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$.
2. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$
3. $f(x) = 3^{x-1}$
4. $f(x) = e^{e^x}$
5. $f(x) = \ln(1 + x + \sqrt{1+x})$
6. $f(x) = (1+x)^x$
7. $f(x) = (1+x)^{1/x}$
8. $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$

1. $f(x) = e^x \times \dfrac{1}{1+x} = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right) = \boxed{1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)}$
2. 
$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} &= \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} \\ &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = \boxed{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \end{aligned}$$
3. $f(x) = 3^{x-1} = e^{(x-1)\ln(3)} = \dfrac{1}{3}e^{x\ln(3)} = \dfrac{1}{3}\left(1 + (x\ln 3) + \dfrac{(x\ln 3)^2}{2} + o(x^2)\right)$
$= \boxed{\dfrac{1}{3} + \dfrac{\ln(3)}{3}x + \dfrac{(\ln 3)^2}{6}x^2 + o(x^2)}$
4. 
$$\begin{aligned} f(x) = e^{e^x} &= \exp\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = e \times e^{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\ &= e\left(1 + \left(x + \frac{x^2}{2}\right) + \frac{\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^2}{2} + o(x^2)\right) = e\left(1 + x + x^2 + o(x^2)\right) = \boxed{e + ex + ex^2 + o(x^2)} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x+\sqrt{1+x}) \\
&= \ln\left(1+x+\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)\right) \\
&= \ln\left(2+\frac{3x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right) \\
&= \ln(2)+\ln\left(1+\frac{3x}{4}-\frac{x^2}{16}+o(x^2)\right) \\
&= \ln(2)+\left(\frac{3x}{4}-\frac{x^2}{16}\right)-\frac{\left(\frac{3x}{4}-\frac{x^2}{16}\right)^2}{2}+o(x^2) \\
&= \ln(2)+\frac{3x}{4}-\frac{x^2}{16}-\frac{9x^2}{32}+o(x^2) \\
&= \boxed{\ln(2)+\frac{3x}{4}-\frac{11x^2}{32}+o(x^2)}
\end{aligned}$$

6.

$$f(x)=(1+x)^x=\exp\left(x\ln(1+x)\right)=\exp\left(x\left(x+o(x)\right)\right)=\exp\left(x^2+o(x^2)\right)=\boxed{1+x^2+o(x^2)}$$

7.

$$\begin{aligned}
f(x)=(1+x)^{1/x}&=\exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)=\exp\left(\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\right)=\exp\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right) \\
&= e\times e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}=e\left(1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)+\frac{\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)^2}{2}+o(x^2)\right) \\
&= e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right)=\boxed{e-\frac{e}{2}x+\frac{11e}{24}x^2+o(x^2)}
\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{1+\sqrt{1+x}} \\
&= \sqrt{1+\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right)} \\
&= \sqrt{2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)} \\
&= \sqrt{2}\times\sqrt{1+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+o(x^2)} \\
&= \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}\right)^2+o(x^2)\right) \\
&= \sqrt{2}\left(1+\frac{x}{8}-\frac{x^2}{32}-\frac{x^2}{128}+o(x^2)\right) \\
&= \boxed{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}x-\frac{5\sqrt{2}}{128}x^2+o(x^2)}
\end{aligned}$$

**2** Déterminer les développements limités d'ordre 3 des fonctions suivantes au voisinage de 0 :

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
2. $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$
3. $f(x) = (1+x)^x$
4. $f(x) = e^{\cos(2x)}$
5. $f(x) = e^{1+x}$
6. $f(x) = \dfrac{x\ln(1+x)}{\cos(x)}$
7. $f(x) = \sqrt{1+3\cos(4x)}$
8. $f(x) = \ln(2+\sin(2x))$.
9. $f(x) = \sqrt{3+\sqrt{1+8x^2}}$
10. $f(x) = \mathrm{Arctan}(e^{2x}-1)$.

1. $f(x) = \ln(1+x)-\ln(1-x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = \boxed{2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}$.
2. $f(x) = e^x \times \frac{1}{1+x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)\right) = \boxed{1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$
3. $f(x) = (1+x)^x = \exp\left(x\ln(1+x)\right) = \exp\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) = 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2}\right) + o(x^3) = \boxed{1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)}$
4. $f(x) = e^{\cos(2x)} = e^{1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^3)} = e \times e^{-2x^2 + o(x^3)} = e\left(1 + \left(-2x^2\right) + o(x^3)\right) = \boxed{e - 2ex^2 + o(x^3)}$
5. $f(x) = e^{1+x} = e \times e^x = e\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \boxed{e + ex + \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^3 + o(x^3)}$
6. 
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x\ln(1+x)}{\cos(x)} \\ &= \frac{x\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} \\ &= \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} \\ &= \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \\ &= \boxed{x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} \end{aligned}$$

7. 
$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+3\cos(4x)} = \sqrt{1 + 3\left(1 - \frac{(4x)^2}{2} + o(x^3)\right)} \\ &= \sqrt{4 - 24x^2 + o(x^3)} \\ &= 2\sqrt{1 - 6x^2 + o(x^3)} \\ &= 2\left(1 + \frac{1}{2}\left(-6x^2\right) + o(x^3)\right) \\ &= \boxed{2 - 6x^2 + o(x^3)} \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(2+\sin(2x)) \\
&= \ln\left(2+(2x)-\frac{(2x)^3}{6}+o(x^3)\right) \\
&= \ln\left(2+2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\right) \\
&= \ln(2)+\ln\left(1+x-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\right) \\
&= \ln(2)+\left(x-\frac{2}{3}x^3\right)-\frac{\left(x-\frac{2}{3}x^3\right)^2}{2}+\frac{\left(x-\frac{2}{3}x^3\right)^3}{3}+o(x^3) \\
&= \ln(2)+x-\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3) \\
&= \boxed{\ln(2)+x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}
\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{3+\sqrt{1+8x^2}} \\
&= \sqrt{3+\left(1+\frac{1}{2}(8x^2)+o(x^3)\right)} \\
&= \sqrt{4+4x^2+o(x^3)} \\
&= 2\sqrt{1+x^2+o(x^3)} \\
&= 2\left(1+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\right) = \boxed{2+x^2+o(x^3)}
\end{aligned}$$

10. On a ici : $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{1+(e^{2x}-1)^2} = \dfrac{2e^{2x}}{2-2e^{2x}+e^{4x}}$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2\left(1+(2x)+\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)\right)}{2-2\left(1+(2x)+\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)\right)+\left(1+(4x)+\frac{(4x)^2}{2}+o(x^2)\right)} \\
&= \frac{2+4x+4x^2+o(x^2)}{1+4x^2+o(x^2)} \\
&= (2+4x+4x^2+o(x^2))(1-4x^2+o(x^2)) \\
&= 2+4x-4x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

Donc en primitivant :

$$f(x) = f(0)+2x+4\frac{x^2}{2}-4\frac{x^3}{3}+o(x^3) = \boxed{2x+2x^2-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}$$

**3** Calculer les limites suivantes:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$
2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\ln(x)}$.
3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\sqrt{1+2x}}{x^2}$.
4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{1-\cos(x)}$
5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x^2}$.
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x)+1-e^x}{\sin(x)-x}$.

1. En posant $x=\dfrac{1}{h}$, on a :

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=(1+h)^{1/h}=\exp\left(\frac{1}{h}\ln(1+h)\right)=\exp\left(\frac{1}{h}(h+o(h))\right)=\exp\left(1+o(1)\right)\underset{h\to0}{\longrightarrow}\boxed{e}$$

2. En posant $h=x-1$, on a :

$$\frac{x^2-1}{\ln(x)}=\frac{(1+h)^2-1}{\ln(1+h)}=\frac{h^2+2h}{h+o(h)}=\frac{2+h}{1+o(1)}\underset{h\to0}{\longrightarrow}\boxed{2}$$

3.

$$\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{x^2}=\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(1+\frac{1}{2}(2x)-\frac{1}{8}(2x)^2+o(x^2)\right)}{x^2}=\frac{x^2+o(x^2)}{x^2}=1+o(1)\underset{x\to0}{\longrightarrow}\boxed{1}$$

4.

$$\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{1-\cos(x)}=\frac{\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right)-1-\frac{x}{2}}{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}=\frac{-\frac{x^2}{8}+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=\frac{-\frac{1}{8}+o(1)}{\frac{1}{2}+o(1)}\underset{x\to0}{\longrightarrow}\frac{-\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\boxed{-\frac{1}{4}}$$

5.

$$\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^2}=\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-2x}{x^2}=\frac{o(x^2)}{x^2}\underset{x\to0}{\longrightarrow}\boxed{0}$$

6.

$$\frac{x\ln(1+x)+1-e^x}{\sin(x)-x}=\frac{x\left(x+o(x)\right)+1-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-x}=\frac{-x+o(x)}{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=\frac{-1+o(1)}{-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}\underset{x\to0}{\longrightarrow}\boxed{+\infty}$$

$\boxed{4}$ Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Rappeler le $DL$ d'ordre 2 de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0.
2. Démontrer que $f$ est continue et dérivable en 0, et préciser $f'(0)$.

1. Lorsque $u$ est au voisinage de 0, $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$.
2. On a donc pour tout $x$ au voisinage de 0, $(x \neq 0)$,

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$, donc $f$ est bien continue en 0.
De plus, $f$ admet alors un DL d'ordre 1 en 0 qui est :

$$f(x) = 1 + 0 \times x + o(x)$$

donc $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

**5** Soit $f$ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{1-e^{-t}} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

1. Démontrer que $f$ est continue sur $[0,+\infty[$.
2. Démontrer que $f$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et déterminer $f'(t)$ pour tout $t \in [0,+\infty[$.
3. Démontrer que $f$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$.

1. $f$ est continue sur $]0,+\infty[$ (quotient de fonctions continues sur $]0,+\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas), et on a, au voisinage de 0 :
$$\frac{t}{1-e^{-t}} = \frac{t}{1-(1-t+o(t))} = \frac{t}{t+o(t)} = \frac{1}{1+o(1)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1 = f(0)$$
donc $f$ est bien continue en 0.
2. $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ (quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas), et on a :
$$\forall t > 0,\ f'(t) = \frac{1(1-e^{-t}) - t(e^{-t})}{(1-e^{-t})^2} = \frac{1-e^{-t}-te^{-t}}{(1-e^{-t})^2}$$
La fonction $f$ est-elle dérivable en 0 ? On a au voisinage de 0 :
$$f(t) = \frac{t}{1-e^{-t}} = \frac{t}{1-\left(1-t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)} = \frac{1}{1-\frac{t}{2}+o(t)} = 1 + \frac{t}{2} + o(t)$$
donc $f$ admet un DL d'ordre 1 en 0, donc $f$ est bien dérivable et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.
3. Pour tout $t > 0$, $f'(t) = \dfrac{1-e^{-t}-te^{-t}}{(1-e^{-t})^2}$.

   Notons pour tout $t \geqslant 0$, $\varphi(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t}$.
   La fonction $\varphi$ est dérivable et on a : $\forall t \geqslant 0, \varphi'(t) = e^{-t} - (e^{-t} - te^{-t}) = te^{-t}$.
   Ainsi, $\forall t > 0, \varphi'(t) > 0$, donc $\varphi$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Or, $\varphi(0) = 0$, donc $\varphi$ est strictement positive sur $]0,+\infty[$.
   Finalement :
$$\forall x > 0,\ f'(x) > 0$$
   La fonction $f$ est donc continue sur $[0,+\infty[$ et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, elle réalise donc une bijection de $[0,+\infty[$ vers $f([0,+\infty[) = [f(0), \lim\limits_{+\infty} f[ = [1,+\infty[$.

**6** Soit $f$ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} x^{1+\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Démontrer que $f$ est continue en 0, et étudier la dérivabilité en 0.
2. Démontrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x + 1$. En déduire les variations de $f$.
3. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$, puis un équivalent de $f(x) - x$ en $+\infty$.
4. Démontrer que $f$ admet un développement limité en 1 d'ordre 2 et le déterminer.

1. Pour $x > 0$, on a : $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}} = \exp\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$ On a $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x) = -\infty$, donc
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{u\to-\infty} e^u = 0 = f(0)$$
La fonction $f$ est bien continue en 0.
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = x^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$
Donc $f$ est bien dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
2. Notons pour tout $x > 0$, $g(x) = \ln(x) - x - 1$.
La fonction $g$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x > 0, g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.
La fonction $g$ est croissante sur $]0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$, elle admet donc un maximum en 1, qui vaut $g(1) = -2$.
La fonction $g$ est donc toujours négative, donc :
$$\forall x > 0,\ \ln(x) \leqslant x + 1$$
La fonction $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ par composition, et on a :
$$\forall x > 0,\ f(x) = \exp\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$
donc :
$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\ln(x) + \left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\right)\exp\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) = \frac{1+x-\ln(x)}{x^2} \times x^{1+\frac{1}{x}} \geqslant 0$$
La fonction $f$ est donc croissante sur $[0,+\infty[$.
3. $$f(x) = \exp\left(\ln(x) + \frac{\ln(x)}{x}\right)$$
Or, par croissances comparées, $\frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.
$$f(x) - x = x^{1+\frac{1}{x}} - x = x\left(x^{1/x} - 1\right) = x\left(\exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) - 1\right)$$
Or, lorsque $u \to 0$, $e^u = 1 + u + o(u)$, donc :
$$f(x) - x = x\left(\frac{\ln(x)}{x} + o\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)\right) = \ln(x) + o(\ln(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \boxed{\ln(x)}$$

4. La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, donc en particulier en 1 elle admet bien un DL d'ordre 2. Notons $x = 1+h$, on a alors :

$$\begin{aligned}
f(x) = f(1+h) = (1+h)^{1+\frac{1}{1+h}} &= \exp\left(\left(1+\frac{1}{1+h}\right)\ln(1+h)\right) \\
&= \exp\left((1+(1-h+h^2+o(h^2))\left(h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)\right) \\
&= \exp\left(2h-2h^2+o(h^2)\right) \\
&= 1+\left(2h-2h^2\right)+\frac{(2h-2h^2)^2}{2}+o(h^2) \\
&= 1+2h+o(h^2) \\
&= \boxed{1+2(x-1)+o((x-1)^2)}
\end{aligned}$$

**7** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le développement limité d'ordre 2 de $f$ en 0.
3. Montrer que $f$ est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
4. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(x)$ pour tout réel $x$.
5. Étudier les variations de $f$ et ses limites et tracer son tableau de variations complet.

1. Pour tout $x \neq 0$,
$$e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$$
Ainsi, $e^x - 1$ et $x$ sont toujours du même signe, donc :
$$\forall x \neq 0,\ \frac{e^x - 1}{x} > 0$$
Ainsi, pour tout réel $x$, $f(x)$ existe bien : $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

   Sur $\mathbb{R}^*$, $f$ est continue en tant que composée de quotient de fonctions continues.
De plus, au voisinage de 0, on a :
$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \ln\left(\frac{(1 + x + o(x)) - 1}{x}\right) = \ln\left(\frac{x + o(x)}{x}\right) = \ln(1 + o(1)) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \ln(1) = 0 = f(0)$$
Ainsi, $f$ est bien continue en 0 également.
2. Pour $x$ au voisinage de 0,
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - 1}{x}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \\ &= \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^2 + o(x^2) \\ &= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \\ &= \boxed{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)} \end{aligned}$$
3. $f$ admettant un $DL$ d'ordre 2 en 0, elle en admet en particulier un d'ordre 1 qui est :
$$f(x) = \frac{x}{2} + o(x)$$
Ainsi, $f$ est donc dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

4. La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall x \neq 0,\ f'(x) = \frac{\dfrac{(e^x)x - (e^x - 1)1}{x^2}}{\dfrac{e^x - 1}{x}} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$$

La fonction $f'$ est donc continue sur $\mathbb{R}^*$. Montrons que $f'$ est également continue en 0 (sachant que $f'(0) = 1/2$).

$$f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = \frac{x(1 + x + o(x)) - (1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) + 1}{x(1 + x + o(x) - 1)} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2} = f'(0)$$

La fonction $f'$ est donc bien continue aussi en 0. La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

5. On a vu que : $\forall x \neq 0,\ f'(x) = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$.

On sait que $\forall x \neq 0, x(e^x - 1) > 0$ (car $x$ et $e^x - 1$ sont toujours du même signe).
Notons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = xe^x - e^x + 1$.
La fonction $\varphi$ est dérivable et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$.
La fonction $\varphi$ est donc décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$, admettant donc un minimum en 0. Or, $\varphi(0) = 0$, donc $\varphi$ est toujours positive :

$$\forall x \neq 0,\ xe^x - e^x + 1 \geqslant 0$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R},\ f'(x) \geqslant 0$ (même en 0), donc $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour ses limites, on a :

$$\frac{e^x - 1}{x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{(croissances comparées)}$$

donc par composition, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

De plus,

$$\frac{e^x - 1}{x} \underset{x \to -\infty}{\sim} \frac{-1}{x} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc par composition, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$.

On en déduit le tableau de variations de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**8** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel $x$.
2. Montrer que $f'$ n'est pas dérivable en 0. Montrer que $f$ admet cependant un DL d'ordre 2 en 0.

1. La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par produit de composées de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall x \neq 0,\ f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Pour la dérivabilité en 0, on a :

$$\forall x \neq 0, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = x^2 \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{borné}} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc $f$ est bien dérivable en 0 et on a $f'(0) = 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. Regardons si $f'$ est dérivable en 0.

$$\forall x \neq 0,\ \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{f'(x)}{x} = 3x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

mais, $\lim\limits_{x \to 0} 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ et $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.
Donc $\dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$ n'admet pas de limite en 0, la fonction $f'$ n'est donc pas dérivable en 0.

Cependant, $f$ admet un DL d'ordre 2 en 0 qui est évident :

$$f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \times \underbrace{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} = o(x^2)$$

donc $f$ admet bien un DL d'ordre 2 qui est :

$$f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + o(x^2)$$

**9** Soit $f$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},\ f(x) = \frac{2^x - x^2}{x-2}$$

1. Montrer que $f$ admet un prolongement par continuité en 2, et étudier la dérivabilité de ce prolongement en 2.
2. Déterminer la position du graphe de $f$ par rapport à la tangente au point d'abscisse 2.

1. Étudions la limite de $f$ en 2. Posons pour cela $x = 2 + h \iff h = x - 2$. On a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2^{2+h} - (2+h)^2}{(2+h)-2} = \frac{4e^{h\ln(2)} - 4 - 4h - h^2}{h} \\
&= \frac{4\left(1 + h\ln(2) + \frac{(h\ln(2))^2}{2} + \frac{(h\ln(2))^3}{6} + o(h^3)\right) - 4 - 4h - h^2}{h} \\
&= \frac{4(\ln(2)-1)h + (2\ln^2(2)-1)h^2 + \frac{2\ln^3(2)}{3}h^3 + o(h^3)}{h} \\
&= 4(\ln(2)-1) + (2\ln^2(2)-1)h + \frac{2\ln^3(2)}{3}h^2 + o(h^2) \\
&= 4(\ln(2)-1) + (2\ln^2(2)-1)(x-2) + \frac{2\ln^3(2)}{3}(x-2)^2 + o((x-2)^2)
\end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4(\ln 2 - 1)$$

   donc $f$ est bien prolongeable par continuité en 2 en posant $f(2) = 4(\ln 2 - 1)$.

   De plus, la fonction $f$ (prolongée) admettant alors un DL d'ordre 1, elle est dérivable en 2, et $f'(2) = 2\ln^2(2) - 1$.

2. L'équation de la tangente en 2 est :

$$y = 4(\ln(2)-1) + (2\ln^2(2)-1)(x-2)$$

   et on a vu dans la question 1 que :

$$f(x) - \big(4(\ln(2)-1) + (2\ln^2(2)-1)(x-2)\big) = \frac{2\ln^3(2)}{3}(x-2)^2 + o((x-2)^2) \underset{x\to 2}{\sim} \frac{2\ln^3(2)}{3}(x-2)^2 \geqslant 0$$

   Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est située (au voisinage de 2) au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 2.

**10** Montrer que la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2e^{-x}}{1-e^{-2x}}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, et est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, le dénominateur ne s'annulant pas.
De plus, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2e^{-x}}{1-e^{-2x}} \\
&= \frac{x^2e^{-x}}{1-\left(1+(-2x)+\frac{(-2x)^2}{2}+o(x^2)\right)} \\
&= \frac{x^2e^{-x}}{2x-2x^2+o(x^2)} \\
&= \frac{x}{2}e^{-x} \times \frac{1}{1-x+o(x)} \\
&= \frac{x}{2}\left(1-x+o(x)\right)\left(1+x+o(x)\right) \\
&= \frac{x}{2}\left(1+o(1)\right) \\
&= \frac{x}{2}+o(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $f$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
De plus, notre fonction $f$ (prolongée) admettant un DL d'ordre 1 en 0, elle est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.
Vérifions que $f'$ est continue sur $\mathbb{R}$ maintenant.
Pour tout $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2xe^{-x}-x^2e^{-x})(1-e^{-2x})-x^2e^{-x}(2e^{-2x})}{(1-e^{-2x})^2} \\
&= \frac{e^{-x}}{(1-e^{-2x})^2}\left[(2x-x^2)(1-e^{-2x})-2x^2e^{-2x}\right] \\
&= \frac{(1-x+o(x))}{(2x+o(x))^2}\left((2x-x^2)(2x+o(x))-2x^2(1+o(1))\right) \\
&= \frac{(1-x+o(x))}{4x^2+o(x^2)}\left(4x^2+o(x^2)-2x^2+o(x^2)\right) \\
&= \frac{(1-x+o(x))}{4x^2+o(x^2)}\left(2x^2+o(x^2)\right) \\
&= \frac{(1+o(1))}{4+o(1)}(2+o(1)) \\
&\underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = f'(0)
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $f'$ est bien continue en 0, donc $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

**11** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$$

1. Donner le DL d'ordre 2 de $f$ en 0. En déduire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 et leurs positions relatives au voisinage de 0.
2. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a $f(x) = x + 1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
   En déduire que $f$ admet une asymptote et préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette asymptote.

1. Au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= -x\sqrt{1+x^2}\frac{1}{1-x} \\ &= -x\left(1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(1+x+x^2+o(x^2)\right) \\ &= \left(-x+o(x^2)\right)\left(1+x+x^2+o(x^2)\right) \\ &= \boxed{-x-x^2+o(x^2)} \end{aligned}$$

   La tangente au point d'abscisse 0 a donc pour équation :

$$y = -x$$

   et on a : $f(x) - (-x) = -x^2 + o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2$, donc la courbe représentative de $f$ est située en-dessous de cette tangente (au moins au voisinage de 0).

2. Lorsque $x \to +\infty$, notons $h = \frac{1}{x}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{h}\sqrt{\frac{1}{h^2}+1}\frac{h}{1-h} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{1}{h^2}+1}}{1-h} \\ &= \frac{1}{h}\sqrt{1+h^2} \times \frac{1}{1-h} \\ &= \frac{1}{h}\left(1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)\right)\left(1+h+h^2+o(h^2)\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(1+h+\frac{3}{2}h^2+o(h^2)\right) \\ &= \frac{1}{h}+1+\frac{3}{2}h+o(h) \\ &= x+1+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

   On a donc que :

$$(f(x)-(x+1)) = \frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   Ainsi, $f$ admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = x+1$.
   De plus, $f(x)-(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2x} > 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est située (au voisinage de $+\infty$) au-dessus de son asymptote.