

1 Déterminer les développements limités d'ordre 2 des fonctions suivantes au voisinage de 0 :

$$1. f(x) = \frac{e^x}{1+x}.$$

$$2. f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$$

$$3. f(x) = 3^{x-1}$$

$$4. f(x) = e^{e^x}$$

$$5. f(x) = \ln(1+x+\sqrt{1+x})$$

$$6. f(x) = (1+x)^x$$

$$7. f(x) = (1+x)^{1/x}$$

$$8. f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$$

$$1. f(x) = e^x \times \frac{1}{1+x} = \left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) (1-x+x^2+o(x^2)) = \boxed{1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$$

2.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} \\ &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = \boxed{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. f(x) &= 3^{x-1} = e^{(x-1)\ln(3)} = \frac{1}{3} e^{x\ln(3)} = \frac{1}{3} \left(1 + (x\ln 3) + \frac{(x\ln 3)^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{3} + \frac{\ln(3)}{3}x + \frac{(\ln 3)^2}{6}x^2 + o(x^2)} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{e^x} = \exp\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) = e \times e^{x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \\ &= e \left(1 + \left(x + \frac{x^2}{2}\right) + \frac{\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^2}{2} + o(x^2)\right) = e(1+x+x^2+o(x^2)) = \boxed{e+ex+ex^2+o(x^2)} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1 + x + \sqrt{1+x}) \\
&= \ln\left(1 + x + \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right)\right) \\
&= \ln\left(2 + \frac{3x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) \\
&= \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{3x}{4} - \frac{x^2}{16} + o(x^2)\right) \\
&= \ln(2) + \left(\frac{3x}{4} - \frac{x^2}{16}\right) - \frac{\left(\frac{3x}{4} - \frac{x^2}{16}\right)^2}{2} + o(x^2) \\
&= \ln(2) + \frac{3x}{4} - \frac{x^2}{16} - \frac{9x^2}{32} + o(x^2) \\
&= \boxed{\ln(2) + \frac{3x}{4} - \frac{11x^2}{32} + o(x^2)}
\end{aligned}$$

6.

$$f(x) = (1+x)^x = \exp(x \ln(1+x)) = \exp(x(x + o(x))) = \exp(x^2 + o(x^2)) = \boxed{1 + x^2 + o(x^2)}$$

7.

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right) = \exp\left(\frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)\right) = \exp\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \\
&= e \times e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = e \left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) + \frac{\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)^2}{2} + o(x^2)\right) \\
&= e \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) = \boxed{e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2)}
\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{1 + \sqrt{1+x}} \\
&= \sqrt{1 + \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)} \\
&= \sqrt{2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)} \\
&= \sqrt{2} \times \sqrt{1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + o(x^2)} \\
&= \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16}\right) - \frac{1}{8} \left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16}\right)^2 + o(x^2)\right) \\
&= \sqrt{2} \left(1 + \frac{x}{8} - \frac{x^2}{32} - \frac{x^2}{128} + o(x^2)\right) \\
&= \boxed{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}x - \frac{5\sqrt{2}}{128}x^2 + o(x^2)}
\end{aligned}$$

2 Déterminer les développements limités d'ordre 3 des fonctions suivantes au voisinage de 0 :

$$1. f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$2. f(x) = \frac{e^x}{1+x}$$

$$3. f(x) = (1+x)^x$$

$$4. f(x) = e^{\cos(2x)}$$

$$5. f(x) = e^{1+x}$$

$$6. f(x) = \frac{x \ln(1+x)}{\cos(x)}$$

$$7. f(x) = \sqrt{1+3\cos(4x)}$$

$$8. f(x) = \ln(2 + \sin(2x)).$$

$$9. f(x) = \sqrt{3 + \sqrt{1+8x^2}}$$

$$10. f(x) = \text{Arctan}(e^{2x} - 1).$$

$$1. f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = \boxed{2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}.$$

$$2. f(x) = e^x \times \frac{1}{1+x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) (1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)) = \boxed{1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$$

$$3. f(x) = (1+x)^x = \exp(x \ln(1+x)) = \exp\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) = 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2}\right) + o(x^3) = \boxed{1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)}$$

$$4. f(x) = e^{\cos(2x)} = e^{1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^3)} = e \times e^{-2x^2 + o(x^3)} = e(1 + (-2x^2) + o(x^3)) = \boxed{e - 2ex^2 + o(x^3)}$$

$$5. f(x) = e^{1+x} = e \times e^x = e \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \boxed{e + ex + \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^3 + o(x^3)}$$

6.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x \ln(1+x)}{\cos(x)} \\ &= \frac{x \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} \\ &= \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} \\ &= \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \\ &= \boxed{x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+3\cos(4x)} = \sqrt{1+3\left(1 - \frac{(4x)^2}{2} + o(x^3)\right)} \\ &= \sqrt{4 - 24x^2 + o(x^3)} \\ &= 2\sqrt{1 - 6x^2 + o(x^3)} \\ &= 2\left(1 + \frac{1}{2}(-6x^2) + o(x^3)\right) \\ &= \boxed{2 - 6x^2 + o(x^3)} \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(2 + \sin(2x)) \\
&= \ln\left(2 + (2x) - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3)\right) \\
&= \ln\left(2 + 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right) \\
&= \ln(2) + \ln\left(1 + x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\right) \\
&= \ln(2) + \left(x - \frac{2}{3}x^3\right) - \frac{\left(x - \frac{2}{3}x^3\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{2}{3}x^3\right)^3}{3} + o(x^3) \\
&= \ln(2) + x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
&= \boxed{\ln(2) + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}
\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{3 + \sqrt{1 + 8x^2}} \\
&= \sqrt{3 + \left(1 + \frac{1}{2}(8x^2) + o(x^3)\right)} \\
&= \sqrt{4 + 4x^2 + o(x^3)} \\
&= 2\sqrt{1 + x^2 + o(x^3)} \\
&= 2\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) = \boxed{2 + x^2 + o(x^3)}
\end{aligned}$$

10. On a ici : $f'(x) = \frac{2e^{2x}}{1 + (e^{2x} - 1)^2} = \frac{2e^{2x}}{2 - 2e^{2x} + e^{4x}}$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2\left(1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right)}{2 - 2\left(1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right) + \left(1 + (4x) + \frac{(4x)^2}{2} + o(x^2)\right)} \\
&= \frac{2 + 4x + 4x^2 + o(x^2)}{1 + 4x^2 + o(x^2)} \\
&= (2 + 4x + 4x^2 + o(x^2))(1 - 4x^2 + o(x^2)) \\
&= 2 + 4x - 4x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

Donc en primitivant :

$$f(x) = f(0) + 2x + 4\frac{x^2}{2} - 4\frac{x^3}{3} + o(x^3) = \boxed{2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)}$$

3 Calculer les limites suivantes:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln(x)}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{1 - \cos(x)}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x) + 1 - e^x}{\sin(x) - x}.$$

1. En posant $x = \frac{1}{h}$, on a :

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = (1+h)^{1/h} = \exp\left(\frac{1}{h} \ln(1+h)\right) = \exp\left(\frac{1}{h}(h + o(h))\right) = \exp(1 + o(1)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \boxed{e}$$

2. En posant $h = x - 1$, on a :

$$\frac{x^2 - 1}{\ln(x)} = \frac{(1+h)^2 - 1}{\ln(1+h)} = \frac{h^2 + 2h}{h + o(h)} = \frac{2+h}{1+o(1)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \boxed{2}$$

3.

$$\frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2} = \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(1 + \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{8}(2x)^2 + o(x^2)\right)}{x^2} = \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1 + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \boxed{1}$$

4.

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{1 - \cos(x)} = \frac{\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) - 1 - \frac{x}{2}}{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} = \frac{-\frac{x^2}{8} + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{-\frac{1}{8} + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

5.

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2} = \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 2x}{x^2} = \frac{o(x^2)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \boxed{0}$$

6.

$$\frac{x \ln(1+x) + 1 - e^x}{\sin(x) - x} = \frac{x(x + o(x)) + 1 - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - x} = \frac{-x + o(x)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{-1 + o(1)}{-\frac{x^2}{6} + o(x^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \boxed{+\infty}$$

4 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Rappeler le DL d'ordre 2 de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0.
2. Démontrer que f est continue et dérivable en 0, et préciser $f'(0)$.

1. Lorsque u est au voisinage de 0, $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$.

2. On a donc pour tout x au voisinage de 0, ($x \neq 0$),

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$, donc f est bien continue en 0.

De plus, f admet alors un DL d'ordre 1 en 0 qui est :

$$f(x) = 1 + 0 \times x + o(x)$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

5 Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{1 - e^{-t}} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

- Démontrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
- Démontrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et déterminer $f'(t)$ pour tout $t \in [0, +\infty[$.
- Démontrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$.

1. f est continue sur $]0, +\infty[$ (quotient de fonctions continues sur $]0, +\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas), et on a, au voisinage de 0 :

$$\frac{t}{1 - e^{-t}} = \frac{t}{1 - (1 - t + o(t))} = \frac{t}{t + o(t)} = \frac{1}{1 + o(1)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 = f(0)$$

donc f est bien continue en 0.

2. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ (quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas), et on a :

$$\forall t > 0, f'(t) = \frac{1(1 - e^{-t}) - t(e^{-t})}{(1 - e^{-t})^2} = \frac{1 - e^{-t} - te^{-t}}{(1 - e^{-t})^2}$$

La fonction f est-elle dérivable en 0 ? On a au voisinage de 0 :

$$f(t) = \frac{t}{1 - e^{-t}} = \frac{t}{1 - \left(1 - t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)} = \frac{1}{1 - \frac{t}{2} + o(t)} = 1 + \frac{t}{2} + o(t)$$

donc f admet un DL d'ordre 1 en 0, donc f est bien dérivable et $f'(0) = \frac{1}{2}$.

3. Pour tout $t > 0$, $f'(t) = \frac{1 - e^{-t} - te^{-t}}{(1 - e^{-t})^2}$.

Notons pour tout $t \geq 0$, $\varphi(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t}$.

La fonction φ est dérivable et on a : $\forall t \geq 0, \varphi'(t) = e^{-t} - (e^{-t} - te^{-t}) = te^{-t}$.

Ainsi, $\forall t > 0, \varphi'(t) > 0$, donc φ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Or, $\varphi(0) = 0$, donc φ est strictement positive sur $]0, +\infty[$.

Finalement :

$$\forall t > 0, f'(t) > 0$$

La fonction f est donc continue sur $[0, +\infty[$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ vers $f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{+\infty} f[= [1, +\infty[$.

6 Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} x^{1+\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

- Démontrer que f est continue en 0, et étudier la dérivabilité en 0.
- Démontrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x + 1$. En déduire les variations de f .
- Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis un équivalent de $f(x) - x$ en $+\infty$.
- Démontrer que f admet un développement limité en 1 d'ordre 2 et le déterminer.

1. Pour $x > 0$, on a : $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}} = \exp\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$ On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln(x) = -\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0 = f(0)$$

La fonction f est bien continue en 0.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = x^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

Donc f est bien dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2. Notons pour tout $x > 0$, $g(x) = \ln(x) - x - 1$.

La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0, g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

La fonction g est croissante sur $]0, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$, elle admet donc un maximum en 1, qui vaut $g(1) = -2$.

La fonction g est donc toujours négative, donc :

$$\forall x > 0, \ln(x) \leq x + 1$$

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ par composition, et on a :

$$\forall x > 0, f(x) = \exp\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

donc :

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\ln(x) + \left(1 + \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\right)\exp\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) = \frac{1+x-\ln(x)}{x^2} \times x^{1+\frac{1}{x}} \geq 0$$

La fonction f est donc croissante sur $[0, +\infty[$.

3.

$$f(x) = \exp\left(\ln(x) + \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

Or, par croissances comparées, $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

$$f(x) - x = x^{1+\frac{1}{x}} - x = x \left(x^{1/x} - 1\right) = x \left(\exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) - 1\right)$$

Or, lorsque $u \rightarrow 0$, $e^u = 1 + u + o(u)$, donc :

$$f(x) - x = x \left(\frac{\ln(x)}{x} + o\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)\right) = \ln(x) + o(\ln(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \boxed{\ln(x)}$$

4. La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$, donc en particulier en 1 elle admet bien un DL d'ordre 2. Notons $x = 1 + h$, on a alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1+h) = (1+h)^{1+\frac{1}{1+h}} = \exp\left(\left(1+\frac{1}{1+h}\right)\ln(1+h)\right) \\ &= \exp\left(\left(1+(1-h+h^2+o(h^2))\right)\left(h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)\right) \\ &= \exp(2h-2h^2+o(h^2)) \\ &= 1+(2h-2h^2)+\frac{(2h-2h^2)^2}{2}+o(h^2) \\ &= 1+2h+o(h^2) \\ &= \boxed{1+2(x-1)+o((x-1)^2)} \end{aligned}$$

7 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien définie et continue sur \mathbb{R} .
2. Déterminer le développement limité d'ordre 2 de f en 0.
3. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
4. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et préciser $f'(x)$ pour tout réel x .
5. Étudier les variations de f et ses limites et tracer son tableau de variations complet.

1. Pour tout $x \neq 0$,

$$e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$$

Ainsi, $e^x - 1$ et x sont toujours du même signe, donc :

$$\forall x \neq 0, \frac{e^x - 1}{x} > 0$$

Ainsi, pour tout réel x , $f(x)$ existe bien : f est bien définie sur \mathbb{R} .

Sur \mathbb{R}^* , f est continue en tant que composée de quotient de fonctions continues.

De plus, au voisinage de 0, on a :

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \ln\left(\frac{(1 + x + o(x)) - 1}{x}\right) = \ln\left(\frac{x + o(x)}{x}\right) = \ln(1 + o(1)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln(1) = 0 = f(0)$$

Ainsi, f est bien continue en 0 également.

2. Pour x au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - 1}{x}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \\ &= \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^2 + o(x^2) \\ &= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \\ &= \boxed{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)} \end{aligned}$$

3. f admettant un DL d'ordre 2 en 0, elle en admet en particulier un d'ordre 1 qui est :

$$f(x) = \frac{x}{2} + o(x)$$

Ainsi, f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$.

4. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^* en tant que composée de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{\frac{(e^x)x - (e^x - 1)1}{x^2}}{\frac{e^x - 1}{x}} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$$

La fonction f' est donc continue sur \mathbb{R}^* . Montrons que f' est également continue en 0 (sachant que $f'(0) = 1/2$).

$$f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = \frac{x(1 + x + o(x)) - (1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) + 1}{x(1 + x + o(x) - 1)} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = f'(0)$$

La fonction f' est donc bien continue aussi en 0. La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

5. On a vu que : $\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$.

On sait que $\forall x \neq 0, x(e^x - 1) > 0$ (car x et $e^x - 1$ sont toujours du même signe).

Notons pour tout $x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = xe^x - e^x + 1$.

La fonction φ est dérivable et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$.

La fonction φ est donc décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$, admettant donc un minimum en 0. Or, $\varphi(0) = 0$, donc φ est toujours positive :

$$\forall x \neq 0, xe^x - e^x + 1 \geq 0$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq 0$ (même en 0), donc f est croissante sur \mathbb{R} .

Pour ses limites, on a :

$$\frac{e^x - 1}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad (\text{croissances comparées})$$

donc par composition, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$.

De plus,

$$\frac{e^x - 1}{x} \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{-1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$$

donc par composition, $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$.

On en déduit le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

8 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
2. Montrer que f' n'est pas dérivable en 0. Montrer que f admet cependant un DL d'ordre 2 en 0.

1. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^* par produit de composées de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall x \neq 0, f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Pour la dérivabilité en 0, on a :

$$\forall x \neq 0, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = x^2 \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{borné}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Donc f est bien dérivable en 0 et on a $f'(0) = 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. Regardons si f' est dérivable en 0.

$$\forall x \neq 0, \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{f'(x)}{x} = 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

mais, $\lim_{x \rightarrow 0} 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ et $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.

Donc $\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$ n'admet pas de limite en 0, la fonction f' n'est donc pas dérivable en 0.

Cependant, f admet un DL d'ordre 2 en 0 qui est évident :

$$f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \times \underbrace{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\rightarrow 0} = o(x^2)$$

donc f admet bien un DL d'ordre 2 qui est :

$$f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + o(x^2)$$

9 Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) = \frac{2^x - x^2}{x - 2}$$

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 2, et étudier la dérivabilité de ce prolongement en 2.
2. Déterminer la position du graphe de f par rapport à la tangente au point d'abscisse 2.

1. Étudions la limite de f en 2. Posons pour cela $x = 2 + h \iff h = x - 2$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2^{2+h} - (2+h)^2}{(2+h) - 2} = \frac{4e^{h \ln(2)} - 4 - 4h - h^2}{h} \\ &= \frac{4 \left(1 + h \ln(2) + \frac{(h \ln(2))^2}{2} + \frac{(h \ln(2))^3}{6} + o(h^3) \right) - 4 - 4h - h^2}{h} \\ &= \frac{4(\ln(2) - 1)h + (2 \ln^2(2) - 1)h^2 + \frac{2 \ln^3(2)}{3}h^3 + o(h^3)}{h} \\ &= 4(\ln(2) - 1) + (2 \ln^2(2) - 1)h + \frac{2 \ln^3(2)}{3}h^2 + o(h^2) \\ &= 4(\ln(2) - 1) + (2 \ln^2(2) - 1)(x - 2) + \frac{2 \ln^3(2)}{3}(x - 2)^2 + o((x - 2)^2) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4(\ln 2 - 1)$$

donc f est bien prolongeable par continuité en 2 en posant $f(2) = 4(\ln 2 - 1)$.

De plus, la fonction f (prolongée) admettant alors un DL d'ordre 1, elle est dérivable en 2, et $f'(2) = 2 \ln^2(2) - 1$.

2. L'équation de la tangente en 2 est :

$$y = 4(\ln(2) - 1) + (2 \ln^2(2) - 1)(x - 2)$$

et on a vu dans la question 1 que :

$$f(x) - (4(\ln(2) - 1) + (2 \ln^2(2) - 1)(x - 2)) = \frac{2 \ln^3(2)}{3}(x - 2)^2 + o((x - 2)^2) \underset{x \rightarrow 2}{\sim} \frac{2 \ln^3(2)}{3}(x - 2)^2 \geq 0$$

Ainsi, \mathcal{C}_f est située (au voisinage de 2) au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 2.

10 Montrer que la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-2x}}$ est prolongeable en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

La fonction f est définie sur \mathbb{R}^* , et est clairement de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* par quotient de fonctions de classe \mathcal{C}^1 , le dénominateur ne s'annulant pas.

De plus, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-2x}} \\ &= \frac{x^2 e^{-x}}{1 - \left(1 + (-2x) + \frac{(-2x)^2}{2} + o(x^2)\right)} \\ &= \frac{x^2 e^{-x}}{2x - 2x^2 + o(x^2)} \\ &= \frac{x}{2} e^{-x} \times \frac{1}{1 - x + o(x)} \\ &= \frac{x}{2} (1 - x + o(x)) (1 + x + o(x)) \\ &= \frac{x}{2} (1 + o(1)) \\ &= \frac{x}{2} + o(x) \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

De plus, notre fonction f (prolongée) admettant un DL d'ordre 1 en 0, elle est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Vérifions que f' est continue sur \mathbb{R} maintenant.

Pour tout $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2xe^{-x} - x^2e^{-x})(1 - e^{-2x}) - x^2e^{-x}(2e^{-2x})}{(1 - e^{-2x})^2} \\ &= \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-2x})^2} [(2x - x^2)(1 - e^{-2x}) - 2x^2e^{-2x}] \\ &= \frac{(1 - x + o(x))}{(2x + o(x))^2} ((2x - x^2)(2x + o(x)) - 2x^2(1 + o(1))) \\ &= \frac{(1 - x + o(x))}{4x^2 + o(x^2)} (4x^2 + o(x^2) - 2x^2 + o(x^2)) \\ &= \frac{(1 - x + o(x))}{4x^2 + o(x^2)} (2x^2 + o(x^2)) \\ &= \frac{(1 + o(1))}{4 + o(1)} (2 + o(1)) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = f'(0) \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f' est bien continue en 0, donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$$

- Donner le DL d'ordre 2 de f en 0. En déduire l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f en 0 et leurs positions relatives au voisinage de 0.
- Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a $f(x) = x + 1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
En déduire que f admet une asymptote et préciser la position de \mathcal{C}_f par rapport à cette asymptote.

1. Au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= -x\sqrt{1+x^2} \frac{1}{1-x} \\ &= -x \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) (1 + x + x^2 + o(x^2)) \\ &= (-x + o(x^2)) (1 + x + x^2 + o(x^2)) \\ &= \boxed{-x - x^2 + o(x^2)} \end{aligned}$$

La tangente au point d'abscisse 0 a donc pour équation :

$$y = -x$$

et on a : $f(x) - (-x) = -x^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^2$, donc la courbe représentative de f est située en-dessous de cette tangente (au moins au voisinage de 0).

2. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, en factorisant par x^2 sous la racine et par x au dénominateur, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}} \\ &= x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \\ &= x \left(1 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \left(x + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x + 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

On a donc que :

$$(f(x) - (x+1)) = \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, f admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = x + 1$.

De plus, $f(x) - (x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{2x} > 0$, donc \mathcal{C}_f est située (au voisinage de $+\infty$) au-dessus de son asymptote.