1 **Remarque:** Connaître son cours et savoir l'appliquer étaient des conditions nécessaires pour réussir cet exercice.

1. Soit n un entier naturel alors (n+2)! + n! = n! ((n+2)(n+1)+1)= n!($n^2 + 3n + 3$). La factorisation est terminée car le discriminant de $n^2 + 3n + 3$ est strictement négatif.
2. Soit x un réel alors la formule du binôme de Newton donne: $(x+2)^5 = x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32$
3. Soient a et b des réels alors $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
4. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n : "$u_n = 6 \times 2^n - 5$"
   Initialisation: Pour n= 0 on a $6 \times 2^0 - 5 = 1 = u_0$ donc P_0 est vraie.
   Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n soit vraie. Alors on a $u_{n+1} = 2u_n + 5 = 2(6 \times 2^n - 5) + 5 = 6 \times 2^{n+1} - 10 + 5 = 6 \times 2^{n+1} - 5$ donc P_{n+1} est vraie.
   Conclusion: Par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.
5. On résout l'équation sur $\mathbb{R}$. On pose $X = x^2$, cela implique $X \geqslant 0$. L'équation devient $X^2 - 2X - 3 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 16$ ainsi $X = -1$ (impossible dans $\mathbb{R}$) ou $X = 3$. Finalement comme $X = x^2$, on cherche les réels x qui vérifient $x^2 = 3$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\right\}}$$

6. $\binom{10}{2} = 45$. Soit $p \in \mathbb{N}$, $\binom{p+3}{p} = \frac{(p+3)(p+2)(p+1)}{6}$

2 **Remarques:** Ne développez surtout pas si vous cherchez à étudier le signe d'une expression: on connaît facilement le signe d'un produit mais pas le signe d'une somme.
Le raisonnement par disjonction de cas est à éviter avec un quotient. En revanche il est nécessaire avec des valeurs absolues et des racines carrées. Il impose un raisonnement par analyse et synthèse ainsi il faut bien penser à vérifier que les solutions proposées sont dans l'intervalle dans lequel on travaille.

1. (a) Il faut que $-x^2 + 2x + 3 \geqslant 0$. Les racines de ce polynôme sont -1 et 3 et le coefficient $a = -1 < 0$ donc $x \in [-1; 3]$.
   (b) Si $x < 0$ alors l'équation n'a pas de solution (une racine carrée ne peut pas être strictement négative). Si $x \geqslant 0$ alors en considérant les carrés de chaque membre, il reste à résoudre $-x^2 + 2x + 3 = x^2$ soit $2x^2 - 2x - 3 = 0$ dont les solutions sont $\frac{2-\sqrt{28}}{4} = \frac{1-\sqrt{7}}{2} < 0$ (ne convient pas) et $\frac{2+\sqrt{28}}{4} = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$.

$$\boxed{\text{S} = \left\{\tfrac{1+\sqrt{7}}{2}\right\}}$$

2. Raisonnons par disjonction de cas:
   Si $x + 4 \leqslant 0$ autrement dit si $x \leqslant -4$ alors l'équation n'a pas de solution (une valeur absolue est positive ou nulle donc on doit travailler avec $x + 4 > 0$).
   Si $x + 4 > 0$: 1^{er} **cas**: sur [1;+∞[il faut résoudre $x - 1 < x + 4$ soit $-1 < 4$ ce qui est vrai donc tous les réels de [1;+∞[sont solutions.
   2^{eme} **cas**: sur]-4;1[il faut résoudre $-x + 1 < x + 4$ soit $\frac{-3}{2} < x$.

$$\boxed{\mathcal{S} =]\frac{-3}{2}; 1[\cup[1; +\infty[=]\frac{-3}{2}; +\infty[}$$

3. (a) L'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \{1; -3\}$ (on ne peut pas diviser par 0).
   (b) Par ailleurs $\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x+3} = \frac{x+3-3(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{2(-x+3)}{(x-1)(x+3)}$. On a le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$-x+3$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$Quotient$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$$\boxed{\text{S} =]\text{-}3;\, 1[\ \cup [3; +\infty[}$$

3 $S_1 = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} jk) = \sum_{j=1}^{n} j(\sum_{k=1}^{n} k) = \sum_{j=1}^{n} j(\frac{n(n+1)}{2}) = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Pour S_2:

Méthode 1

$S_2 = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=j}^{n} jk) = \sum_{j=1}^{n} j(\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{j-1} k) = \sum_{j=1}^{n} j(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(j-1)j}{2}) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^3 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2$

$= \frac{1}{2}\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{24}[3n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1)]$

$= \frac{1}{24}n(n+1)[3n(n+1) + 2(2n+1)] = \frac{1}{24}n(n+1)(3n^2+7n+2) = \frac{1}{24}n(n+1)(3n+1)(n+2)$

Méthode 2 (en échangeant les sommes)

$S_2 = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=j}^{n} jk) = \sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} jk = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{k} jk) = \sum_{k=1}^{n} k(\sum_{j=1}^{k} j) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2) =$
$\frac{1}{2}\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = ... = \frac{1}{24}n(n+1)(3n+1)(n+2)$

Pour S_3:

Méthode 1 (en utilisant S_2)

$S_3 = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=j+1}^{n} jk) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=j}^{n} jk - j^2) = S_2 - \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{24}n(n+1)(3n+1)(n+2) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \frac{1}{24}n(n+1)[(3n+1)(n+2) - 4(2n+1)] = \frac{1}{24}n(n+1)(3n^2-n-2) = \frac{1}{24}n(n+1)[(3n+2)(n-1)]$

Méthode 2

$\text{S}_3 = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=j+1}^{n} jk) = \sum_{j=1}^{n} j(\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{j} k) = \sum_{j=1}^{n} j(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{j(j+1)}{2}) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^3 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2$

$= \frac{1}{2}\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{24}[3n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)(2n+1)] = \frac{1}{24}n(n+1)[3n(n+1) - 2(2n+1)]$

$= \frac{1}{24}n(n+1)[(3n+2)(n-1)]$

Méthode 3 (en échangeant les sommes)

$S_3 = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=j+1}^{n} jk) = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} jk = \sum_{k=2}^{n} k(\sum_{j=1}^{k-1} j) = \sum_{k=2}^{n} k\frac{(k-1)k}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(k^3-k^2) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^3-k^2) =$
$\frac{1}{2}(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}) = ...$

$\boxed{4}$ **Remarques:** Une fraction bien définie est non nulle si et seulement si son numérateur est non nul.

La formule qui donne la somme des premières puissances d'un nombre $q \neq 1$, est valable pour tout entier naturel n, on peut donc l'appliquer en remplaçant n par $n-1$ à condition que $n-1 \geqslant 0$...

1. $u_2 = \frac{2u_1u_0}{3u_0-u_1} = \frac{4}{6-1} = \frac{4}{5}$ et $u_3 = \frac{2u_2u_1}{3u_1-u_2} = \frac{\frac{8}{5}}{3-\frac{4}{5}} = \frac{8}{11}$
2. On admet dans cette question que la suite (u_n) est bien définie c'est-à-dire que pour tout entier n, $3u_n - u_{n+1} \neq 0$ et on note pour tout entier n, P_n : "$u_n \neq 0$".
   Initialisation: $u_0 = 2 \neq 0$ et $u_1 = 1 \neq 0$ donc P_0 et P_1 sont vraies.
   Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que P_n et P_{n+1} sont vraies. Alors $2u_{n+1}u_n \neq 0$ donc on a bien $u_{n+2} = \frac{2u_{n+1}u_n}{3u_n-u_{n+1}} \neq 0$
   Conclusion: Par une récurrence double, on a montré que pour tout entier $n, u_n \neq 0$.
3. (a) Soit n un entier naturel. On a $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+2}} - \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{3u_n-u_{n+1}}{2u_{n+1}u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{3u_n-u_{n+1}}{2u_{n+1}u_n} - \frac{2u_n}{2u_{n+1}u_n} = \frac{u_n-u_{n+1}}{2u_{n+1}u_n}$.
   Par ailleurs $\frac{1}{2}v_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}) = \frac{1}{2}\frac{u_n-u_{n+1}}{u_nu_{n+1}} = v_{n+1}$. La suite est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   (b) Pour tout entier n on a: $v_n = v_0(\frac{1}{2})^n$ avec $v_0 = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_0} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, il vient $v_n = (\frac{1}{2})^{n+1}$.

   (c) Soit n un entier naturel non nul, on a d'une part :

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \boxed{1 - \frac{1}{2^n}}$$

Mais aussi, en revenant à la définition de (v_n), on obtient (en reconnaissant une somme télescopique) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} = \boxed{\frac{1}{u_n} - \frac{1}{2}}$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^n} \Longrightarrow \frac{1}{u_n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} = \frac{3 \times 2^{n-1} - 1}{2^n} \Longrightarrow u_n = \boxed{\frac{2^n}{3 \times 2^{n-1} - 1}}$$

4.png

Cette formule est vraie pour tout entier n non nul. Pour $n = 0$ on a $u_0 = 2$ et $\frac{2^0}{3\times 2^{0-1}-1} = \frac{1}{\frac{3}{2}-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Ainsi on a démontré que pour tout entier naturel $n, u_n = \frac{2^n}{3\times 2^{n-1}-1}$.

$\boxed{5}$

1. Soit $n \geqslant 1$. On a $u_{n+1} - u_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+2} + \frac{-1}{2n+1} = \frac{-1}{(2n+2)(2n+1)}$
2. On étudie le signe de : $u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{(2n+2)(2n+1)} < 0$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc décroissante.
3. Une suite décroissante est majorée par son premier terme donc pour tout entier naturel non nul n on a: $u_n \leqslant u_1$ et $u_1 = S_2 = -1 + \frac{1}{2} = \frac{-1}{2}$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée par $\frac{-1}{2}$.

BONUS

Soient a et b des réels. Par symétrie des rôles joués par a et b on peut supposer que $a \geqslant b$.
Alors $|a-b| = b - a$ ainsi $min(a,b) = a = \frac{a+b-|a-b|}{2}$ et $max(a;b) = b = \frac{a+b+|a+b|}{2}$

SI VOUS VOUS ENNUYEZ

1. $S_{0,n} = \sum_{k=1}^{n} k^0 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$

2. (a) Avec le changement d'indice $j = n+1-k$ on a $k = n+1-j$ et $S_{1,n} = \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{j=1}^{n}(n+1-j)$

   (b) On a donc $S_{1,n} = \sum_{j=1}^{n}(n+1) - S_{1,n}$. Ainsi on retrouve que $2 \times S_{1,n} = n(n+1)$

3. (a) Avec le changement d'indice $j = k+1$ on a $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 = \sum_{j=2}^{n+1} j^2 = S_{2,n} - 1 + (n+1)^2$

   (b) Par ailleurs $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(k^2+2k+1) = S_{2,n} + 2 \times S_{1,n} + n$

   (c) D'après les questions précédentes on a: $S_{2,n} - 1 + (n+1)^2 = S_{2,n} + 2 \times S_{1,n} + n$ donc on retrouve $2 \times S_{1,n} = (n+1)^2 - 1 - n = n^2 + n = n(n+1)$

4. Soit $p \geqslant 1$.

   On a d'une part avec le changement d'indice $j = k+1$: $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p+1} = \sum_{j=2}^{n+1}(j)^{p+1} = S_{p+1,n} - 1 + (n+1)^{p+1}$

   On a d'autre part avec la formule du Binôme: $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p+1} = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=0}^{p+1}\binom{p+1}{j}k^j)$ or $\binom{p+1}{p+1} = 1$ et $\binom{p+1}{p} = p+1$ donc on a :
   $\sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=0}^{p+1}\binom{p+1}{j}k^j) = S_{p+1,n} + (p+1)S_{p,n} + \sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p+1}{j}k^j) = S_{p+1,n} + (p+1)S_{p,n} + \sum_{j=0}^{p-1}((\binom{p+1}{j})(\sum_{k=1}^{n} k^j)) = S_{p+1,n} + (p+1)S_{p,n} + \sum_{j=0}^{p-1}\binom{p+1}{j}S_{j,n}$

   On retrouve bien que $(p+1)S_{p,n} = -1 + (n+1)^{p+1} - \sum_{j=0}^{p-1}\binom{p+1}{j}S_{j,n}$

5. On applique la formule précédente avec p = 2 puis p = 3 et enfin p = 4. On retrouve tous calculs faits: $S_{2,n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $S_{3,n} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$; $S_{4,n} = \frac{12n^5+30n^4+20n^3-2n}{60}$

6. Soit $p \geqslant 1$. Raisonnons par analyse et synthèse:
   supposons qu'il existe un entier m tel que $S_{p,2} = m^2 = 1 + 2^p$ alors $2^p = m^2 - 1 = (m+1)(m-1)$
   $m+1$ et $m-1$ divise une puissance de 2 donc $m+1$ et $m-1$ sont des puissances de 2. De plus $m+1$ et $m-1$ sont des entiers de même parité car ils encadrent un même nombre entier m. $m+1$ et $m-1$ sont donc nécessairement des nombres pairs qui se suivent dans la liste des nombres pairs. La seule possibilté est $m+1 = 4$ et $m-1 = 2$ donc $2^p = (m+1)(m-1) = 8$ ainsi $p = 3$. Réciproquement on a vérifié dans la question précédente que $S_{3,n} = (S_{1,n})^2$ donc p = 3 convient et c'est bien le seul.