Eléments de correction du DS4

Problème 1 : ESCP 2017
Partie A

1. g est dérivable sur $[0;1]$ en tant que composée et produit de fonctions dérivables et on a pour tout $t \in [0;1], g'(t) = \pi(cos(\pi t) - sin(\pi t))e^{-\pi t}$
$g'(t) = 0 \Leftrightarrow cos(\pi t) = sin(\pi t)$ donc, en posant $x = \pi t$ on recherche les solutions de l'équation $cos(x) = sin(x)$ sur $[0;\pi]$:
$cos(x) = sin(x) \Leftrightarrow cos(x) = cos(\frac{\pi}{2} - x) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$.
On obtient le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{1}{4}$		1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{-\pi}{4}}$	$\searrow$	0

2. Pour tous u, v dans $[0;1]$, la fonction g étant continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$ et pour tout $t \in]0;1[; |g'(t)| \leqslant \pi(|cos(\pi t)| + |sin(\pi t)|) \leqslant 2\pi$, on sait d'après l'inégalité des accroissements finis que , $|g(v) - g(u)| \leqslant 2\pi|v - u|$. Ce qu'on voulait démontrer.
3. Pour tout $t \in [0;1]$ on pose $u(t) = sin(\pi t)$ et $v'(t) = e^{-\pi t}$. On a $u'(t) = \pi cos(\pi t)$ et $v(t) = \frac{e^{-\pi t}}{-\pi}$. u et v sont C^1 sur $[0;1]$ donc une IPP donne :
$\int_0^1 g(t)dt = [sin(\pi t)\frac{e^{-\pi t}}{-\pi}]_0^1 + \int_0^1 cos(\pi t)e^{-\pi t}dt$
$$= \int_0^1 cos(\pi t)e^{-\pi t}dt$$
Pour tout $t \in [0;1]$ on pose $f(t) = cos(\pi t)$ et $w'(t) = e^{-\pi t}$. On a $f'(t) = -\pi sin(\pi t)$ et $w(t) = \frac{e^{-\pi t}}{-\pi}$. f et w sont C^1 sur $[0;1]$ donc une IPP donne :
$\int_0^1 g(t)dt = [cos(\pi t)\frac{e^{-\pi t}}{-\pi}]_0^1 - \int_0^1 sin(\pi t)e^{-\pi t}dt$
Ainsi $2\int_0^1 g(t)dt = \frac{e^{-\pi}+1}{\pi}$ d'où $\int_0^1 g(t)dt = \frac{e^{-\pi}+1}{2\pi}$.
4. $\int_0^1 g(t)dt = Im(\int_0^1 e^{\pi(i-1)t}dt) = Im([\frac{e^{\pi(i-1)t}}{\pi(i-1)}]_0^1)$
$$= Im(\frac{e^{\pi(i-1)}-1}{\pi(i-1)})$$
$$= Im(\frac{(e^{i\pi}e^{-\pi}-1)(-1-i)}{2\pi})$$
or $e^{i\pi} = -1$ ainsi : $\int_0^1 g(t)dt = Im(\frac{(e^{-\pi}+1)(1+i)}{2\pi}) = \frac{e^{-\pi}+1}{2\pi}$

Partie B

1. Soit x un réel non nul alors $\phi(x) = [\frac{-cos(xt)}{x}]_{t=0}^{t=1} = \frac{1-cos(x)}{x}$.
2. $\phi(0) = \int_0^1 0dt = 0$. La fonction ϕ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-*$ en tant somme et quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas. Montrons que ϕ est continue en 0.
On sait par équivalent usuel que $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0 = \phi(0)$. La fonction ϕ est donc continue sur $\mathbb{R}$.

3. (a) ϕ est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas et pour tout réel x non nul on a : $\phi'(x) = \frac{sin(x)\times x-1\times(1-cos(x))}{x^2} = \frac{xsin(x)-1+cos(x)}{x^2} = \frac{sin(x)}{x} + \frac{cos(x)-1}{x^2}$.

   (b) $\phi(x) = \frac{1-cos(x)}{x} = \frac{\frac{x^2}{2}+o(x^3)}{x} = \frac{x}{2} + o(x^2)$. Comme ϕ admet un DL à l'ordre 1, on sait que ϕ est dérivable en 0 et $\phi'(0) = \frac{1}{2}$

   (c) ϕ' est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ par opérations sur les fonctions continues. Il s'agit donc de vérifier que ϕ' est continue en 0. On utilise les équivalents usuels pour calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{cos(x)-1}{x^2}$:
   on sait que $sin(x) \sim_0 x$ et $cos(x) - 1 \sim_0 -x^2/2$ donc
   $\lim\limits_{x\to 0} \phi'(x) = 1 - 1/2 = 1/2 = \phi'(0)$. CQFD

4. (a) Soit k un entier naturel non nul on a : $\phi(2k\pi) = \frac{1-cos(2k\pi)}{2k\pi} = 0$.

   (b) Soit k un entier naturel non nul. La fonction ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[2k\pi; 2(k+1)\pi]$ et dérivable sur sur $]2k\pi; 2(k+1)\pi[$ (car $k \in \mathbb{N}^*$). De plus on peut remarquer, à l'aide de la question 4a), que $\phi(2k\pi) = \phi(2(k+1)\pi) = 0$. Ainsi d'après le théorème de Rolle, il existe au moins un réel c dans l'intervalle $]2k\pi; 2(k+1)\pi[$ tel que $\phi'(c) = 0$.

Partie C

1. Pour tout réel x, la fonction $t \mapsto f(t)sin(xt)$ est clairement continue en tant que composée et produit de fonctions continues. Elle est donc intégrable sur $[0;1]$ et ψ est bien définie.
2. $\mathbb{R}$ est centré en 0 et la fonction sinus étant impaire, on remarque sans difficulté que pour tout réel x, $\psi(-x) = -\int_0^1 f(t)sin(xt)dt = -\psi(x)$. ψ est donc impaire.
3. Dans la partie A, la fonction f est définie par $f : t \mapsto e^{-\pi t}$ et $x = \pi$.
4. Dans la partie B, la fonction f est la fonction constante égale 1.
5. (a) La fonction f est C^1 sur $[0;1]$, donc la fonction f' est continue sur un segment, elle est donc bornée et atteint ses bornes. Il est donc bien possible de définir $C = max_{[0;1]}|f'(t)|$.

   (b) Soit x un réel strictement positif. On pose $u(t) = f(t)$ et $v'(t) = sin(xt)$. Les fonctions u et v sont C^1 sur $[0;1]$ donc une intégration par parties donne :

$$\int_0^1 f(t)sin(xt)dt = [\frac{-f(t)cos(xt)}{x}]_0^1 + \frac{1}{x}\int_0^1 f'(t)cos(xt)dt$$
$$= \frac{-f(1)cos(x)}{x} + \frac{f(0)}{x} + \frac{1}{x}\int_0^1 f'(t)cos(xt)dt$$

   Avec l'inégalité triangulaire pour les intégrales, on a :
   $|\int_0^1 f'(t)cos(xt)dt| \leq \int_0^1 |f'(t)||cos(xt)|dt \leq \int_0^1 Cdt = C$.
   On obtient donc avec l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$:
   $|\psi(x)| \leq |\frac{-f(1)cos(x)}{x}| + |\frac{f(0)}{x}| + |\frac{C}{x}| \leq \frac{|f(1)|+|f(0)|+C}{x}$ car $x > 0$ et $|cos(x)| \leq 1$.

   (c) Sans aucune difficulté, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{|f(1)|+|f(0)|+C}{x} = 0$.
   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = 0$ d'après le théorème des gendarmes.
   Par imparité on a $\lim\limits_{x\to-\infty} \psi(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \psi(-X) = \lim\limits_{X\to+\infty} -\psi(X) = 0$

6. (a) La fonction f est continue sur $[0;1]$, elle est donc bornée et atteint ses bornes. Il est donc possible de définir $M = max_{[0;1]}|f(t)|$.

(b) Soient u et v deux réels quelconques. La fonction sinus est continue sur $[u;v]$, dérivable sur $]u;v[$ de dérivée cosinus dont la valeur absolue est majorée par 1. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a bien $|sin(u)-sin(v)| \leq |u-v|$

(c) Soient x et y deux réels quelconques. Avec l'inégalité triangulaire pour les intégrales, on a :

$$|\psi(x)-\psi(y)| \leq \int_0^1 |f(t)||sin(xt)-sin(yt)|dt$$

$$\leq \int_0^1 |f(t)||xt-yt|dt \qquad \textit{d'après la question précédente}$$

$$\leq \int_0^1 M|xt-yt|dt \qquad \textit{car } M = max_{[0;1]}|f(t)|$$

On a : $\int_0^1 M|xt-yt|dt = M|x-y|\int_0^1 tdt = M|x-y| \times \frac{1}{2}$ car x et y sont des constantes relativement à la variable d'intégration $t>0$

Ainsi $|\psi(x)-\psi(y)| \leq M|x-y| \times \frac{1}{2}$

Ce qu'on voulait démontrer.

Exercice 1 (Ecricome 2012, ESCP 2016)
Partie A

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $x_n = P_{X\geq n}(X=n) = \frac{P(X=n \cap X\geq n)}{P(X\geq n)} = \frac{P(X=n)}{P(X\geq n)}$
2. Si X suit la loi géométrique de paramètre p alors $P(X=n) = (1-p)^{n-1} \times p$ et $P(X\geq n) = (1-p)^{n-1}$ donc $x_n = p$. La suite est constante.
3. (a) En réduisant $\frac{a}{n+1} + \frac{b}{n}$ au même dénominateur on a $\frac{n(a+b)+b}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$ si et seulement si $a=-b$ et $b=1$ Donc $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n+1} + \frac{1}{n}$.

   (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} P(Z=n) = \sum_{n=1}^{N} \frac{-1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{-1}{N+1} + 1$. En passant à la limite quand N tend vers $+\infty$, on a bien une série convergente de somme 1.

   (c) On s'intéresse à la nature de la série de terme général $nP(Z=n) = \frac{1}{n+1} \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$ qui est le terme d'une série divergente. Alors par critère d'équivalence des suites positives, on sait que la série de terme général $nP(Z=n)$ est divergente, ainsi la variable aléatoire Z n'admet pas d'espérance.

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On a $P(Z\geq n) = 1 - P(Z \leq n-1) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{-1}{k+1} + \frac{1}{k} = 1 - (\frac{-1}{n} + 1) = \frac{1}{n}$

   (e) Le taux de panne associé à Z est donc d'après la question 1 ; $z_n = \frac{1}{n+1}$

Partie B

1. On tire simultanément k boules parmi 2k, il y a donc $\binom{2k}{k}$ tirages possibles. Le nombre de tirages qui contiennent la boule numéro n est $\binom{2k-1}{k-1}$.
   Ainsi : $P(X_n=1) = \frac{\binom{2k-1}{k-1}}{\binom{2k}{k}} = \frac{(2k-1)! \times k! \times (2k-k)!}{(2k)! \times (k-1)! \times (2k-1-(k-1))!} = \frac{(2k-1)! \times k! \times k!}{(2k)! \times (k-1)! \times k!} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$
2. Soit n un entier compris entre 1 et k. X_n prend les valeurs 0 ou 1. On reconnait une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(X_n=1) = \frac{1}{2}$. Son espérance est $E(X_n) = p = \frac{1}{2}$ et sa variance $V(X_n) = p(1-p) = \frac{1}{4}$.

3. Soit $(i;j) \in [1;k]^2$. Le produit de deux variables aléatoires qui suivent une loi de Bernoulli est encore une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(X_i = 1 \cap X_j = 1)$. Le nombre de tirages qui contiennent la boule numéro i et la boule numéro j est $\binom{2k-2}{k-2}$ ainsi $P(X_i = 1 \cap X_j = 1) = \frac{\binom{2k-2}{k-2}}{\binom{2k}{k}} = \frac{(2k-2)! \times k! \times (2k-k)!}{(2k)! \times (k-2)! \times (2k-2-(k-2))!} = \frac{(2k-2)! \times k! \times k!}{(2k)! \times (k-2)! \times k!} = \frac{k(k-1)}{2k(2k-1)} = \frac{k-1}{2(2k-1)}$
   X_iX_j suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{k-1}{2(2k-1)}$.
   On a alors :
   $Cov(X_i;X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = \frac{k-1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{2(k-1)-(2k-1)}{4(2k-1)} = \frac{-1}{4(2k-1)}$
4. Par linéarité de l'espérance on a $E(X) = \frac{n}{2}$.
   Et on sait que $V(X) = \sum_{n=1}^{k} V(X_n) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} Cov(X_i;X_j) = \frac{k}{4} + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} \frac{-1}{4(2k-1)} = \frac{k}{4} + 2 \sum_{i=1}^{k-1} (k-i) \frac{-1}{4(2k-1)} = \frac{k}{4} + 2 \frac{-1}{4(2k-1)} [k(k-1) - \frac{(k-1)k}{2})] = \frac{k}{4} + \frac{-k(k-1)}{4(2k-1)} = \frac{k^2}{4(2k-1)}$
   Remarque : plus simplement, le nombre de couples (i ;j) dans $[1;k]^2$ avec i<j est $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$. Ainsi $V(X) = \frac{k}{4} + 2\frac{k(k-1)}{2}\frac{-1}{4(2k-1)} = \frac{k}{4} - \frac{k(k-1)}{4(2k-1)} = \frac{k(2k-1)-k(k-1)}{4(2k-1)} = \frac{k^2}{4(2k-1)}$
5. Par linéarité de l'espérance on a : $E(Y) = \sum_{n=1}^{k} nE(X_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{4}$.

Exercice 2 (ESCP 2016 ; HEC Paris 2018)

1. (a) Soient M et N $\in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les coefficients de $\lambda M + N$ sont les coefficients de M multipliés par λ plus ceux de N ($(\lambda M + N)_{ij} = \lambda M_{ij} + N_{ij}$) ainsi $Tr(\lambda M + N) = \lambda Tr(M) + Tr(N)$
   (b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour la matrice M dont tous les coefficients sont nuls sauf $m_{11} = a$, on a $Tr(M) = a$. Pour la matrice N dont tous les coefficients sont nuls sauf $m_{22} = a$, on a $Tr(N) = a$. Le nombre a admet au moins 2 antécédents par l'application Tr qui est donc surjective mais pas bijective.
   (c) On sait d'après le théorème du rang que $dim(Ker(Tr)) + rg(Tr) = dim(M_n(\mathbb{R}))$. Ainsi on a $dim(Ker(Tr)) = dim(M_n(\mathbb{R})) - rg(Tr) = n^2 - dim(\mathbb{R}) = n^2 - 1$.
2. (a) Par construction on a $Im(\varphi) \subset M_n(\mathbb{R})$ et φ est linéaire par linéarité de la trace et par distributivité du produit par un scalaire sur la somme de matrices donc φ est un endomorphisme.
   (b) Soit $M \in \ker(\varphi)$. On a alors $M = Tr(M)I_n$. En appliquant la trace à cette égalité on a : $Tr(M) = nTr(M)$ or $n \neq 1$ donc $Tr(M) = 0$ et $M = Tr(M)I_n = 0$. Ainsi φ est injectif. Puisque nous travaillons en dimension finie, un endomorphisme injectif est nécessairement surjectif (le théorème du rang le justifie).
   (c) Soient M $\in M_n(\mathbb{R})$. On remarque que $\varphi(M) = M \Leftrightarrow Tr(M) = 0$. Ainsi $M \in E \Leftrightarrow M \in Ker(Tr)$ et on sait que le noyau d'une application linéaire est un sous espace vectoriel. De plus on a démontré dans la question 1c) que $dim(E) = dim(Ker(Tr)) = n^2 - 1$.
3. (a) Par construction on a $Im(\Psi) \subset M_n(\mathbb{R})$ et Ψ est linéaire par linéarité de la trace et par distributivité du produit par un scalaire sur la somme de matrices donc Ψ est un endomorphisme.

(b) Soit $M \in ker(\Psi)$. On a alors $M = \frac{Tr(M)}{Tr(A)} A \in Vect(A)$.
Réciproquement $\Psi(A) = 0$ donc $A \in Ker(\Psi)$ et par stabilité par combinaison linéaire on a forcément $Vect(A) \subset Ker(\Psi)$. Ainsi $Ker(\Psi) = Vect(A)$ donc $dim(Ker(\Psi)) = 1$.

(c) On sait d'après le théorème du rang que $dim(Ker(\Psi)) + rg(\Psi) = dim(M_n(\mathbb{R}))$. Ainsi on a $dim(Im(\Psi)) = dim(M_n(\mathbb{R})) - dim(Ker(\Psi)) = n^2 - 1$.
Soit $B \in Im(\Psi)$. Alors il existe $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B = Tr(A)M - Tr(M)A$. En appliquant la trace à cette égalité on obtient par linéarité $Tr(B) = 0$ ainsi $B \in Ker(Tr)$. On a donc $Im(\Psi) \subset Ker(Tr)$ or ces deux sous espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{R})$ ont la même dimension donc ils sont égaux : $Im(\Psi) = Ker(Tr)$

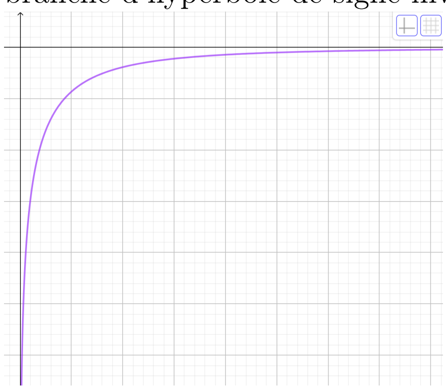
Exercice 3 (ENSAI 2018)

1. (a) f est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout réel $x > 0$, on a $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x(1+x)^2} > 0$ ainsi f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
Par opérations sur les limites on a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

   (b) Au voisinage de 0 on a $ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ et $\frac{1}{1+u} = 1 - u + o(u)$ donc au voisinage de $+\infty$, on a $ln(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})$ et $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$

   (c) Ainsi $x^2 \times f(x) = x \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}} - x^2 ln(1+\frac{1}{x}) = x \times (1 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})) - x + \frac{1}{2} + o(1) = \frac{-1}{2} + o(1)$ ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \times f(x) = \frac{-1}{2}$.

   (d) On représente la courbe, en respectant les asymptotes, l'allure est celle d'une branche d'hyperbole de signe inversé :



2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - ln(n+1) + ln(n) = \frac{1}{n+1} - ln(\frac{n+1}{n}) = \frac{1}{n+1} - ln(1+\frac{1}{n}) = f(n)$. On a démontré dans la question précédente que $f(n) \sim_{+\infty} \frac{-1}{2n^2}$ ainsi $u_n - u_{n+1} \sim_{+\infty} \frac{1}{2n^2}$

   (b) La série de terme général $u_n - u_{n+1}$ est convergente d'après le critère d'équivalence des suites positives. Notons L sa limite. La suite des sommes partielles $(\sum_{k=1}^{n} u_k - u_{k+1})_{n \geq 1}$ converge vers L. Mais pour $N \geq 2$, $\sum_{k=1}^{N-1} u_k - u_{k+1} = u_1 - u_N$.
En passant à la limite quand N tend vers $+\infty$ on retrouve par opérations sur les limites que (u_n) converge vers $u_1 - L = \gamma$.

   (c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction inverse étant strictement décroissante sur $[k; k+1]$, on a $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$. Par positivité de l'intégrale, les bornes étant dans le bon ordre il vient : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$

(d) En ajoutant les inégalités de gauche obtenues à la question précédente pour k variant de 1 à n-1, on a d'après la relation de Chasles : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx$.

Avec le changement de variable j =k+1 on a : $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \leq ln(n) \Leftrightarrow u_n \leq 1$

En ajoutant les inégalités de droite obtenues à la question précédente pour k variant de 1 à n, on a d'après la relation de Chasles : $\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \Leftrightarrow 0 \leq ln(n+1) - ln(n) \leq u_n$. On a donc : $0 \leq u_n \leq 1$.

(e) On est sûr que $0 \leq \gamma \leq 1$