

Exercice 1

1. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que polynôme (ou somme de fonctions dérivables sur cet intervalle) donc elle est en particulier dérivable en 0. On a pour tout réel x , $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ donc $f'(0) = 3$. On cherche l'équation de la tangente en $x = 0$. On sait que c'est une droite dont le coefficient directeur est 3. La bonne réponse est donc $y = 3x - 2$.

Remarque : On peut aussi appliquer la formule qui donne l'équation de la tangente en 0 qui est $y = f'(0)x + f(0)$. On retrouve la même réponse.

2. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que fonction usuelle. Elle est donc en particulier dérivable en 1. On a pour tout réel non nul x , $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ donc $f'(1) = -1$. On cherche l'équation de la tangente en $x = 1$. On sait que c'est la droite d'équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ soit ici $y = -(x - 1) + 1 = -x + 2$.

3. La fonction f est dérivable sur $]4; +\infty[$ en tant que quotient de 2 fonctions dérivables sur cet intervalle, **le dénominateur ne s'annulant pas**.

On a pour tout réel $x \in]4; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2(4-x) - (2x-1)(-1)}{(4-x)^2} = \frac{7}{(4-x)^2}$

4. La fonction f est dérivable sur $]1; +\infty[$ en tant que composée et quotient de fonctions dérivables. On a pour tout réel $x \in]1; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x}{x-1}}} = \frac{-1}{(x-1)^2\sqrt{\frac{2x}{x-1}}}$$

5. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que composée de fonctions dérivables sur cet intervalle. On a pour tout réel x ,

$$f'(x) = 4u'(x)u(x)^3 = 4(2x - 4)(x^2 - 4x + 3)^3 = (8x - 16)(x^2 - 4x + 3)^3.$$

Exercice 2

Partie A

1. Soit n un entier naturel non nul.
On a $v_{n+1} = u_{n+1} - l = au_n + b - l = au_n + (1 - a)l - l = a(u_n - l) = av_n$.
2. La suite (v_n) est géométrique de raison a et de premier terme $v_1 = u_1 - l$ donc pour tout entier naturel non nul on a : $v_n = u_n - l = a^{n-1}(v_1) = a^{n-1}(u_1 - l)$.
Ainsi $u_n = a^{n-1}(u_1 - l) + l = l(1 - a^{n-1}) + a^{n-1}u_1 = \frac{b}{1-a}(1 - a^{n-1}) + a^{n-1}u_1$.
3. **BONUS :** La suite (u_n) est convergente si et seulement si $-1 < a < 1$. Dans ce cas sa limite est $l = \frac{b}{1-a}$.

Partie B

1. $v_1 = u_2 + 2u_1 = -5 + 8 = 3$ et $v_2 = u_3 + 2u_2 = 13 - 10 = 3$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $v_{n+2} = u_{n+3} + 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 2u_{n+2}$ d'une part.
D'autre part $2v_{n+1} - v_n = 2(u_{n+2} + 2u_{n+1}) - (u_{n+1} + 2u_n) = 3u_{n+1} - 2u_n + 2u_{n+2}$.
CQFD
3. (a) Montrons par récurrence double que pour tout entier naturel non nul " $v_n = 3$ "
INITIALISATION : On a vu dans la question 1 que $v_1 = v_2 = 3$
HEREDITE : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $v_n = v_{n+1} = 3$. Montrons que $v_{n+2} = 3$.
D'après ce qui précède on sait que $v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n = 2 \times 3 - 3 = 3$.
CONCLUSION : La propriété est vraie aux 2 premiers rangs et elle se transmet donc on a bien, pour tout entier naturel non nul, $v_n = 3$.
- (b) Il suffit de reprendre la définition de v_n .
- (c) (u_n) est une suite arithmético-géométrique avec $a = -2, b = 3$ donc
 $l = \frac{b}{1-a} = \frac{3}{3} = 1$. D'après le résultat établi dans la partie A on a pour tout entier naturel non nul n , $u_n = 1 - (-2)^{n-1} + (-2)^{n-1} \times 4 = 1 + 3 \times (-2)^{n-1}$.

(d) Non car $-2 \leq -1$.

(e) Soit n un entier naturel non nul. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-2 \neq 1$ donc en appliquant le résultat du cours on a :

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n 1 + 3 \times (-2)^{k-1} = n + 3 \frac{1 - (-2)^n}{3} = n + 1 - (-2)^n$$

Exercice 3

Partie A

1. — INITIALISATION : Pour $n=0$, on a d'une part $D_0 = \sum_{k=0}^0 k^2 = 0$ et d'autre part $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 0$. La propriété est donc vraie pour $n=0$.

— HEREDITE : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $D_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Montrons que $D_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. Or $D_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \end{aligned}$$

D'autre part, $\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$

— CONCLUSION : D'après le principe de récurrence simple; la propriété est vraie pour tous les entiers naturels.

2. (a) On pose $l = k + 1$ dans la somme. Lorsque $k = 0$, on a bien $l = 1$ et lorsque $k = n - 1$, on a $l = n$

(b) On peut utiliser l'égalité précédente et transposer ou reconnaître une somme est télescopique.

(c) On a par ailleurs $\sum_{k=0}^n k^2(k+1) - k(k-1)^2 = \sum_{k=0}^n k^3 + k^2 - k(k^2 - 2k + 1) = \sum_{k=0}^n 3k^2 - k = 3D_n - \frac{n(n+1)}{2}$ Ainsi $3D_n = n^2(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$ CQFD

Partie B

1. (a) Pour $q = 2$, on a : $S_3 = \sum_{k=0}^3 k2^k = 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 = 2 + 8 + 24 = 34$ et

$$\frac{2-4 \times 2^4 + 3 \times 2^5}{(-1)^2} = \frac{2-64+96}{(-1)^2} = 34. \text{ La formule est vérifiée.}$$

(b) Pour $q = 1$, $S_n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. (a) Soit q un réel distinct de 1 et n un entier naturel non nul. On a :

$$(1-q)S_n = \sum_{k=0}^n kq^k - kq^{k+1} = \sum_{k=0}^n kq^k - (k+1)q^{k+1} + \sum_{k=0}^n q^{k+1}.$$

On reconnaît une somme télescopique ainsi :

$$(1-q)S_n = -(n+1)q^{n+1} + \sum_{k=0}^n q^{k+1} = -(n+1)q^{n+1} + \sum_{l=1}^{n+1} q^l$$

$$= -(n+1)q^{n+1} + \sum_{k=1}^n q^k + q^{n+1} = \sum_{k=1}^n q^k - nq^{n+1}$$

(b) On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique, on a : $S_n = \frac{q \frac{1-q^n}{1-q} - nq^{n+1}}{1-q} = \frac{q - q^{n+1} - nq^{n+1}(1-q)}{(1-q)^2} = \frac{q - (n+1)q^{n+1} + nq^{n+2}}{(1-q)^2}$

3. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ en tant que quotient de fonctions dérivables (le dénominateur ne s'annulant pas) et on a pour tout $x \neq 1$,

$$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

(b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ en tant que somme de $(n+1)$ fonctions dérivables et on a pour tout $x \neq 1$, $g'(x) = \sum_{k=1}^{n+1} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^n (k+1)x^k$

(c) $S_n + f(q) = g'(q) \iff S_n = g'(q) - f(q)$

(d) On a $g(x) = \frac{x-x^{n+2}}{1-x}$ donc

$$g'(x) = \frac{[1-(n+2)x^{n+1}](1-x) + x - x^{n+2}}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+2)x^{n+1}}{1-x} + \frac{x-x^{n+2}}{(1-x)^2}$$

$$\text{et } g'(x) - f(x) = \frac{-(n+1)x^{n+1}}{1-x} + \frac{x-x^{n+2}}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^{n+1} + (n+1)x^{n+2} + x - x^{n+2}}{(1-x)^2} = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$$

CQFD.

4. (a) Le terme pour $k = 0$ est nul donc $S_n = \sum_{k=1}^n kq^k$. Or $k = \sum_{j=1}^k 1$. On a bien :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k q^k \text{ (comme dans l'exercice 27 du TD1).}$$

(b) **BONUS** : On cherche à intervertir 2 sommes. Repassons par des inégalités :

$$S_n = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} q^k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n q^k.$$

(c) On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique :

$$S_n = \sum_{j=1}^n q^j \frac{1-q^{n-j+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \sum_{j=1}^n q^j - q^{n+1} = \frac{1}{1-q} (q \frac{1-q^n}{1-q} - nq^{n+1})$$

$$= \frac{1}{(1-q)^2} (q - q^{n+1} - nq^{n+1} + nq^{n+2}) \text{ CQFD}$$

Remarques :

—

Exercice 4

1. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$	
$x^2 + 3x + 2$	$+$	0	$-$	0	$+$

2. Donnons l'expression de $|x+1| + |x^2 + 3x + 2|$ en fonction de x :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$ x+1 $	$-x-1$	$-x-1$	$x+1$	
$ x^2 + 3x + 2 $	$x^2 + 3x + 2$	$-x^2 - 3x - 2$	$x^2 + 3x + 2$	
$ x+1 + x^2 + 3x + 2 $	$x^2 + 2x + 1$	$-x^2 - 4x - 3$	$x^2 + 4x + 3$	

3. Raisonnons par disjonction de cas :

- Sur $] -\infty; -2]$, $x^2 + 2x + 1 > 1 \iff x^2 + 2x > 0$. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-2
$x^2 + 2x$	$+$	0

C'est vrai sur $] -\infty; -2[$.

- Sur $[-2; -1]$, $-x^2 - 4x - 3 > 1 \iff -x^2 - 4x - 4 > 0 \iff x^2 + 4x + 4 < 0 \iff (x + 2)^2 < 0$.

C'est toujours vrai faux.

- Sur $] -1; +\infty[$, $x^2 + 4x + 3 > 1 \iff x^2 + 4x + 2 > 0$. On a le tableau de signes suivant :

x	-1	$\frac{-4+\sqrt{8}}{2} = -2 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 + 4x + 2$	$-$	0	$+$

C'est vrai sur $] -2 + \sqrt{2}; +\infty[$.

4. La fonction h est définie sur $] -\infty; -2[\cup] -2 + \sqrt{2}; +\infty[$

SI VOUS VOUS ENNUYEZ

1. Il faut et il suffit que $x^2 - 1 \leq 0$ pour que f soit bien définie ainsi $D_f =] -\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.
2. Il faut et il suffit que $\frac{1+x}{2-x} > 0$ pour que g soit bien définie ainsi $D_g =] -1; 2[$.
3. Il faut et il suffit que $e^{2x} - 3e^x + 2 \neq 0$ pour que h soit bien définie. En posant $X = e^x$ et en résolvant une équation du second degré en X , on trouve $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0; \ln(2)\}$.
4. Il faut et il suffit que $e^{-x} - 1 > 0$ pour que u soit bien définie. Ainsi $D_u = \mathbb{R}_-^*$.
5. Nécessairement on a $x \neq 0$. Il faut aussi $x+1 \leq \frac{1}{x}$. Ainsi $D_v =] \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; 0[\cup] \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty[$.