Eléments de correction du DS1 (2020-2021)

Exercice 1

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme (ou somme de fonctions dérivables sur cet intervalle) donc elle est en particulier dérivable en 0. On a pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ donc $f'(0) = 3$. On cherche l'équation de la tangente en $x = 0$. On sait que c'est une droite dont le coefficient directeur est 3. La bonne réponse est donc $y = 3x - 2$.
   Remarque : On peut aussi appliquer la formule qui donne l'équation de la tangente en 0 qui est $y = f'(0)x + f(0)$. On retrouve la même réponse.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que fonction usuelle. Elle est donc en particulier dérivable en 1. On a pour tout réel non nul x, $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ donc $f'(1) = -1$. On cherche l'équation de la tangente en $x = 1$. On sait que c'est la droite d'équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ soit ici $y = -(x-1) + 1 = -x + 2$.
3. La fonction f est dérivable sur $]\mathbf{4}; +\infty[$ en tant que quotient de 2 fonctions dérivables sur cet intervalle, **le dénominateur ne s'annulant pas**.
   On a pour tout réel $x \in]\mathbf{4}; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2(4-x)-(2x-1)(-1)}{(4-x)^2} = \frac{7}{(4-x)^2}$
4. La fonction f est dérivable sur $]1; +\infty[$ en tant que composée et quotient de fonctions dérivables. On a pour tout réel $x \in]1; +\infty[$,
   $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x}{x-1}}} = \frac{-1}{(x-1)^2\sqrt{\frac{2x}{x-1}}}$
5. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables sur cet intervalle. On a pour tout réel x,
   $f'(x) = 4u'(x)u(x)^3 = 4(2x-4)(x^2-4x+3)^3 = (8x-16)(x^2-4x+3)^3$.

Exercice 2
Partie A

1. Soit n un entier naturel non nul.
   On a $v_{n+1} = u_{n+1} - l = au_n + b - l = au_n + (1-a)l - l = a(u_n - l) = av_n$.
2. La suite (v_n) est géométrique de raison a et de premier terme $v_1 = u_1 - l$ donc pour tout entier naturel non nul on a : $v_n = u_n - l = a^{n-1}(v_1) = a^{n-1}(u_1 - l)$.
   Ainsi $u_n = a^{n-1}(u_1 - l) + l = l(1 - a^{n-1}) + a^{n-1}u_1 = \frac{b}{1-a}(1 - a^{n-1}) + a^{n-1}u_1$.
3. **BONUS :** La suite (u_n) est convergente si et seulement si $-1 < a < 1$. Dans ce cas sa limite est $l = \frac{b}{1-a}$.

Partie B

1. $v_1 = u_2 + 2u_1 = -5 + 8 = 3$ et $v_2 = u_3 + 2u_2 = 13 - 10 = 3$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $v_{n+2} = u_{n+3} + 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 2u_{n+2}$ d'une part.
   D'autre part $2v_{n+1} - v_n = 2(u_{n+2} + 2u_{n+1}) - (u_{n+1} + 2u_n) = 3u_{n+1} - 2u_n + 2u_{n+2}$.
   CQFD
3. (a) Montrons par récurrence double que pour tout entier naturel non nul "$v_n = 3$"
   INITIALISATION : On a vu dans la question 1 que $v_1 = v_2 = 3$
   HEREDITE : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $v_n = v_{n+1} = 3$. Montrons que $v_{n+2} = 3$. D'après ce qui précède on sait que $v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n = 2 \times 3 - 3 = 3$.
   CONCLUSION : La propriété est vraie aux 2 premiers rangs et elle se transmet donc on a bien, pour tout entier naturel non nul, $v_n = 3$.

   (b) Il suffit de reprendre la définition de v_n.

   (c) (u_n) est une suite arithmético-géométrique avec $a = -2, b = 3$ donc $l = \frac{b}{1-a} = \frac{3}{3} = 1$. D'après le résultat établi dans la partie A on a pour tout entier naturel non nul n , $u_n = 1 - (-2)^{n-1} + (-2)^{n-1} \times 4 = 1 + 3 \times (-2)^{n-1}$.

(d) Non car $-2 \leq -1$.

(e) Soit n un entier naturel non nul. On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-2 \neq 1$ donc en appliquant le résultat du cours on a : $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} 1 + 3 \times (-2)^{k-1} = n + 3\frac{1-(-2)^n}{3} = n + 1 - (-2)^n$

Exercice 3
Partie A

1. — INITIALISATION : Pour n= 0, on a d'une part $D_0 = \sum_{k=0}^{0} k^2 = 0$ et d'autre part $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 0$. La propriété est donc vraie pour n=0.

   — HEREDITE : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $D_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Montrons que $D_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. Or $D_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2$

$$= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

   D'autre part , $\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

   — CONCLUSION : D'après le principe de récurrence simple; la propriété est vraie pour tous les entiers naturels.

2. (a) On pose $l = k + 1$ dans la somme. Lorsque $k = 0$, on a bien $l = 1$ et lorsque $k = n - 1$, on a $l = n$

   (b) On peut utiliser l'égalité précédente et transposer ou reconnaître une somme est télescopique.

   (c) On a par ailleurs $\sum_{k=0}^{n} k^2(k+1) - k(k-1)^2 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + k^2 - k(k^2 - 2k + 1) = \sum_{k=0}^{n} 3k^2 - k = 3D_n - \frac{n(n+1)}{2}$ Ainsi $3D_n = n^2(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$ CQFD

Partie B

1. (a) Pour $q = 2$, on a : $S_3 = \sum_{k=0}^{3} k2^k = 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 = 2 + 8 + 24 = 34$ et $\frac{2-4\times 2^4+3\times 2^5}{(-1)^2} = \frac{2-64+96}{(-1)^2} = 34$. La formule est vérifiée.

   (b) Pour $q = 1, S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. (a) Soit q un réel distinct de 1 et n un entier naturel non nul. On a :
   $(1-q)S_n = \sum_{k=0}^{n} kq^k - kq^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} kq^k - (k+1)q^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} q^{k+1}$.
   On reconnaît une somme télescopique ainsi :

$(1-q)S_n = -(n+1)q^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = -(n+1)q^{n+1} + \sum_{l=1}^{n+1} q^l$
$= -(n+1)q^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} q^k + q^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} q^k - nq^{n+1}$

(b) On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique, on a : $S_n = \frac{q\frac{1-q^n}{1-q} - nq^{n+1}}{1-q} = \frac{q-q^{n+1}-nq^{n+1}(1-q)}{(1-q)^2} = \frac{q-(n+1)q^{n+1}+nq^{n+2}}{(1-q)^2}$

3. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ en tant que quotient de fonctions dérivables (le dénominateur ne s'annulant pas) et on a pour tout $x \neq 1$,
$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x)-(1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}$

(b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ en tant que somme de (n+1) fonctions dérivables et on a pour tout $x \neq 1, g'(x) = \sum_{k=1}^{n+1} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} (k+1)x^k$

(c) $S_n + f(q) = g'(q) \iff S_n = g'(q) - f(q)$

(d) On a $g(x) = \frac{x-x^{n+2}}{1-x}$ donc
$g'(x) = \frac{[1-(n+2)x^{n+1}](1-x)+x-x^{n+2}}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+2)x^{n+1}}{1-x} + \frac{x-x^{n+2}}{(1-x)^2}$
et $g'(x)-f(x) = \frac{-(n+1)x^{n+1}}{1-x} + \frac{x-x^{n+2}}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^{n+1}+(n+1)x^{n+2}+x-x^{n+2}}{(1-x)^2} = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$
CQFD.

4. (a) Le terme pour $k=0$ est nul donc $S_n = \sum_{k=1}^{n} kq^k$. Or $k = \sum_{j=1}^{k} 1$. On a bien :
$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} q^k$ (comme dans l'exercice 27 du TD1).

(b) **BONUS :** On cherche à intervertir 2 sommes. Repassons par des inégalités :
$S_n = \sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} q^k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} q^k$.

(c) On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique :
$S_n = \sum_{j=1}^{n} q^j \frac{1-q^{n-j+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \sum_{j=1}^{n} q^j - q^{n+1} = \frac{1}{1-q}(q\frac{1-q^n}{1-q} - nq^{n+1})$
$= \frac{1}{(1-q)^2}(q - q^{n+1} - nq^{n+1} + nq^{n+2})$ CQFD

Remarques :

— $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$ alors que $\mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N}/n \geq 1\}$
— Le signe d'un produit ou d'un quotient s'étudie grâce à un tableau de signes.
— Une inégalité large est plus générale qu'une inégalité stricte. Une inégalité stricte est plus restrictive qu'une inégalité large.
— Certaines valeurs approchées sont à connaître comme $\sqrt{2} \approx 1,41; e \approx 2,72; \pi \approx 3,14$
— Dans un raisonnement par récurrence, la propriété à démontrer doit être énoncée de façon locale ($v_{n+1} \geq v_n$) pas globale ("la suite (v_n) est croissante").
— On distingue les objets par le nom qu'on leur donne et les notations usuelles : la suite (v_n) ce n'est pas la même chose que le nombre v_n ; la fonction f ce n'est pas la même chose que le nombre $f(x)$.

Exercice 4

1. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
x^2+3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Donnons l'expression de $|x+1|+|x^2+3x+2|$ en fonction de x :

x	$-\infty$	-2		-1		$+\infty$
$\|x+1\|$		$-x-1$		$-x-1$		$x+1$
$\|x^2+3x+2\|$		x^2+3x+2		$-x^2-3x-2$		x^2+3x+2
$\|x+1\|+\|x^2+3x+2\|$		x^2+2x+1		$-x^2-4x-3$		x^2+4x+3

3. Raisonnons par disjonction de cas :
   — Sur $]-\infty;-2], x^2+2x+1>1 \iff x^2+2x>0$. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2
x^2+2x		$+$	0

   C'est vrai sur $]-\infty;-2[$.
   — Sur $[-2;-1], -x^2-4x-3>1 \iff -x^2-4x-4>0 \iff x^2+4x+4<0 \iff (x+2)^2<0$.
   C'est toujours vrai faux.
   — Sur $]-1;+\infty[, x^2+4x+3>1 \iff x^2+4x+2>0$. On a le tableau de signes suivant :

x	-1		$\frac{-4+\sqrt{8}}{2}=-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2+4x+2		$-$	0	$+$	

   C'est vrai sur $]-2+\sqrt{2};+\infty[$.
4. La fonction h est définie sur $]-\infty;-2[\cup]-2+\sqrt{2};+\infty[$

SI VOUS VOUS ENNUYEZ

1. Il faut et il suffit que $x^2-1\leq 0$ pour que f soit bien définie ainsi $D_f=]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$.
2. Il faut et il suffit que $\frac{1+x}{2-x}>0$ pour que g soit bien définie ainsi $D_g=]-1;2[$.
3. Il faut et il suffit que $e^{2x}-3e^x+2\neq 0$ pour que h soit bien définie. En posant $X=e^x$ et en résolvant une équation du second degré en X, on trouve $D_h=\mathbb{R}\backslash\{0;ln(2)\}$.
4. Il faut et il suffit que $e^{-x}-1>0$ pour que u soit bien définie. Ainsi $D_u=\mathbb{R}^*_-$.
5. Nécessairement on a $x\neq 0$. Il faut aussi $x+1\leq\frac{1}{x}$. Ainsi $D_v=[\frac{-1-\sqrt{5}}{2};0[\cup[\frac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty[$.