

Corrigé du devoir maison n°10

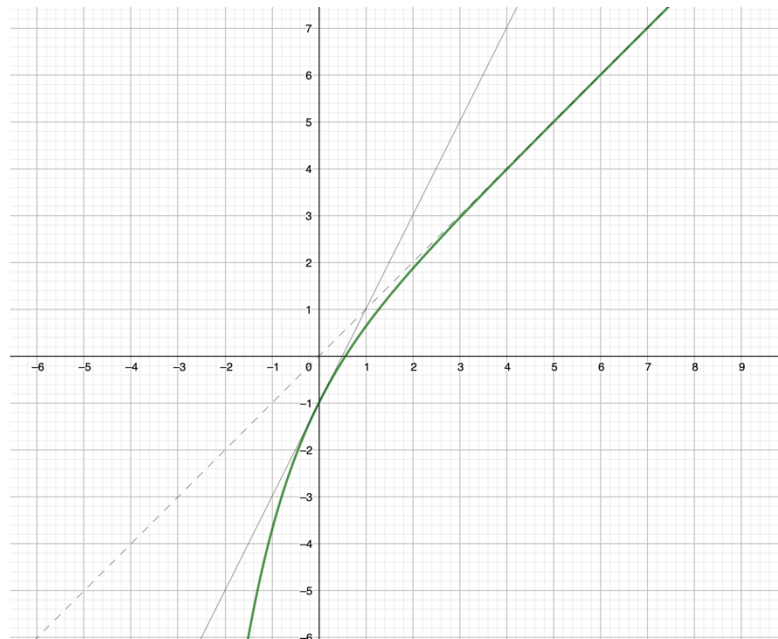
(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est dérivable sur \mathbb{R} en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et pour tout réel x , on a : $f_n'(x) = n + e^{-x}$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) > 0$ donc f_n est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Par opérations sur les limites on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$

Pour construire la courbe assez précisément, on précise que la tangente au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $n+1$; la droite d'équation $y = nx$ est asymptote à la courbe de f_n en $+\infty$.

En prenant $n = 1$:



La fonction f_n est dérivable donc continue sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} . Elle est de plus strictement croissante sur \mathbb{R} . Enfin $0 \in \mathbb{R} = f(\mathbb{R})$, ainsi le théorème de la bijection assure qu'il existe une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$. On note u_n cette solution. On a donc $f_n(u_n) = 0 \Leftrightarrow nu_n = e^{-u_n}$

(c) On a $f_n(0) = -1 < 0 = f_n(u_n) \Leftrightarrow 0 < u_n$ (car f_n^{-1} est strictement croissante sur \mathbb{R} , comme f_n)

Par ailleurs $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - e^{-\frac{1}{n}} = e^0 - e^{-\frac{1}{n}} > 0 = f_n(u_n) \Leftrightarrow \frac{1}{n} > u_n$

(d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ ainsi le théorème d'encadrement permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

On a $f_n(u_n) = 0 \Leftrightarrow nu_n = e^{-u_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{e^{-u_n}}{n} \sim \frac{1}{n}$

(en effet par continuité de la fonction exponentielle, $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-u_n} = e^{-0} = 1$).