Corrigé des exercices pour réviser

EXERCICE 1 : Algèbre linéaire

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 5 & -6 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On note $E = \mathsf{Ker}\, f$ et $F = \mathsf{Ker}\,(f + id_{\mathbf{R}^3})$.

1.a. Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Alors

$$\vec{u} \in E \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 4y + 8z & = & 0 \\ 5x - 6y + 10z & = & 0 \\ x - y + z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -y + 5z & = & 0 \\ -y + 5z & = & 0 \\ x - y + z & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 4z \\ y & = & 5z \end{array} \right.$$

Ainsi $\vec{u}_1 = (4, 5, 1)$ engendre E. Comme ce vecteur est non nul, il forme une famille libre. C'est une base $(\vec{u}_1)$ de E. ▲

b. Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Alors

$$\vec{u} \in \mathrm{F} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 4x - 4y + 8z & = & 0 \\ 5x - 5y + 10z & = & 0 \\ x - y + 2z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ x - y + 2z & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff x = y - 2z$$

On pose $\vec{u}_2 = (1, 1, 0)$ et $\vec{u}_3 = (-2, 0, 1)$. Ces deux vecteurs sont non colinéaires. Ils forment donc une famille libre et génératrice de F. C'est donc une base $(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$ de F. ▲

2. Montrons que $E \oplus F = \mathbf{R}^3$. On utilise pour cela la **caractérisation par les bases** : il suffit pour cela que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

- C'est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$ tel que

$$\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_3 + \lambda_3 \cdot \vec{u}_3 = \vec{0}$$

Traduisons cette égalité vectorielle en coordonnées, il vient

$$(H) \left\{ \begin{array}{rcl} 4\lambda_1 + 2\lambda_2 & = & 0 \\ 5\lambda_1 + 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

- On a une famille libre de 3 vecteurs et Card($\mathbb{R}^3$)= 3 donc c'est une base.

3. a. Il suffit de vérifier que les vecteurs d'une base de P sont stables par f.
On pose $u_1 = (4; 5; 1)$ et $u_2 = (1; 1; 0)$. Ces vecteurs sont dans P et ils ne sont pas colinéaires donc P= Vect(u_1; u_2).
On sait que $u_1 \in Ker(f)$ donc $f(u_1) = 0_{\mathbb{R}^3} \in$ P
On sait que $f(u_2) + u_2 = 0$ d'après la question 1b. donc

$$f(u_2) = -u_2 = (-1; -1; 0) \in \text{P}$$

Remarque : On peut utiliser d'autres vecteurs pour décrire P. Dans ce cas on utilise le produit matriciel pour calculer $f(u)$.

Par exemple avec u=(1 ; 1 ; 0), on a : M $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ =$\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $= -5u_2$ $\in$ P.

b. On cherche un sous espace vectoriel de dimension 1 stable par f et supplémentaire de P dans $\mathbb{R}^3$.

Un candidat tout trouvé est G = Vect(u_3). En effet $f(u_3) = -u_3 \in$ G donc G est stable par f. Et puisque $(u_1;\, u_2;\, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on a bien P $\oplus$ G= $\mathbb{R}^3$

Remarque : cette question est plus difficile à traiter si vous n'avez pas utilisé les vecteurs donnés dans l'énoncé. Dans ce cas la méthode consiste à rechercher une droite vectorielle stable par f et supplémentaire de P dans $\mathbb{R}^3$. On cherche donc v = (a,b,c) $\in \mathbb{R}^3$ de sorte que v complète la base de P en une base de $\mathbb{R}^3$ et tel que Mv $\in$ Vect(v).

EXERCICE 2 : Analyse

1. f est dérivable sur]0 ;+∞[en tant que produit et somme de fonction dérivables et on a pour tout réel $x > 0$

$$f'(x) = \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\ln(x)+2}{2\sqrt{x}}$$

   $f'(x)$ est du signe de son numérateur.
   $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par produit et somme et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln(2)$ par croissances comparées et somme ainsi on a le tableau de variations suivant :

x	0		e^{-2}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖	ln(2)			$+\infty$
	‖		$\frac{-2}{e} + \ln(2) \approx -0{,}03$		

2. On applique le théorème de la bijection sur]0 ; e^{-2}[et sur] e^{-2} ; +∞ [. L'équation $f(x) = 0$ admet exactement 2 solutions sur]0 ; +∞ [.
3. a) Soit n un entier naturel non nul , $f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n^2}\right) + \ln(2) = 0 \Leftrightarrow -\ln(n^2) = -\ln(2^n) \Leftrightarrow n^2 = 2^n$
   b) Un carré est pair si et seulement si le nombre au départ est pair. On a donc n = 2p et $(2p)^2 = 2^{2p} \Leftrightarrow (2p)^2 = (2^p)^2 \Leftrightarrow$2p =$2^p \Leftrightarrow 2p = 2 \times 2^{p-1} \Leftrightarrow p = 2^{p-1}$
   c) Les nombres 1 et 2 sont solutions de l'équation $p = 2^{p-1}$
   d) Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4p^2}$ donc $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{16}$ et ce sont les seules d'après la question 2.
   e) L'équation (E) est équivalente à l'équation $f(x) = 0$ donc S = $\{\frac{1}{4};\, \frac{1}{16}\}$

PROBLEME 1 :

1. a) $x^{[3]} = x(x-1)(x-2)$

   b) $(\frac{3}{2})^{[0]} = 1$ par convention

   $(\frac{3}{2})^{[1]} = \frac{3}{2}$; $(\frac{3}{2})^{[2]} = \frac{3}{4}$; $(\frac{3}{2})^{[3]} = -\frac{3}{8}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{[4]} = \frac{9}{16}$; $(\frac{3}{2})^{[5]} = \frac{-45}{32}$

   c) Lorsque i = k le facteur est nul donc le produit est nul

   d) $\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(n-k)!} = \frac{k^{[n]}}{n!}$

   e) $(-1)^{[n]} = 1$ si n= 0 par convention et $(-1)^{[n]} = (-1)^n n!$

   f) $x(x-1)^{[n]} = x\prod_{i=0}^{n-1}(x-1-i) = x\prod_{j=1}^{n}(x-j) = x^{[n+1]}$

   et $x^{[n]}\,(x-n) = \prod_{0=0}^{n-1}(x-i)(x-n) = \prod_{i=0}^{n}(x-i) = x^{[n+1]}$

   g) (n+1) $x^{[n]} =$ n $x^{[n]} + x^{[n]} = x^{[n]}x - x^{[n+1]} + x^{[n]} = x^{[n]}(x+1) - x^{[n+1]}$

   $= (x+1)^{[n+1]} - x^{[n+1]}$

   h)

$$\sum_{k=0}^{n} k^{[p]} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)^{[p+1]} - k^{[p+1]}}{p+1} = \frac{(n+1)^{[p+1]} - 0^{[p+1]}}{p+1} = \begin{cases} 0 \ si\ p > n \\ p!\binom{n+1}{p+1} \end{cases}$$

2. a) Pour p = 1 dans l'égalité précédente on retrouve

$$\sum_{k=0}^{n} k^{[1]} = \sum_{k=0}^{n} k = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!\,(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2}$$

   On remarque que $k^2 = k(k-1) + k = k^{[2]} + k^{[1]}$

   Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^{[2]} + k^{[1]} = 2!\binom{n+1}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)!}{3(n-2)!} + \frac{n(n+1)}{2} = \cdots = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   b) $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n}\frac{k^{[p]}}{p!} = \binom{n+1}{p+1}$

3. a) $x^{[-3]} = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

   b) Soit n un entier naturel non nul. $x^{[-n]}$ est bien définit pour tout réel $x \in \mathbb{R}\backslash\{0;1;2;\dots;n-1\}$

   c) Soit n un entier strictement négatif :

$$(x+1)^{[n]} - x^{[n]} = \frac{1}{(x+2)(x+3)\dots.(x+1-n)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x-n)}$$
$$= \frac{(x+1)-(x-n+1)}{(x+1)(x+2)\dots(x-n)(x-(n-1))} = nx^{[n-1]}$$

4. a) $S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+n)} = \sum_{k=0}^{n} k^{[-n]} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)^{[-n-1]} - k^{[-n-1]}}{n+1} = \frac{(n+1)^{[-n-1]}}{n+1} =$

   $\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)\dots(2n+2)} = \frac{n!}{(2n+2)!}$ de limite nulle quand n tend vers $+\infty$.

   b) $\frac{1}{p!}\sum_{k=p}^{n}\frac{p!(k-p)!}{k!} = \sum_{k=p}^{n}\frac{(k-p)!}{k!} = \sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k(k-1)\dots(k-p+1)} = \sum_{j=0}^{n-p}\frac{1}{(j+p)(j+p-1)\dots(j+1)} = \sum_{j=0}^{n-p} j^{[-p]}$

5. INITIALISATION évidente

   HEREDITE c'est un copier-coller de ce qui a été fait en cours pour démonter la formule du binôme classique à ceci près que :

   $(x+y)^{[n+1]} = (x+y)^{[n]}(x+y-n) = (x+y)^{[n]}(x-k+y-(n-k))$ et que

   $x^{[k]}(x-k) = x^{[k+1]}$ *et* $y^{[n-k]}(y-(n-k)) = y^{[n-k+1]}$

6. a) $\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\3\end{bmatrix} = \frac{(\frac{3}{2})^{[3]}}{3!} = \frac{\frac{-3}{8}}{6} = \frac{-1}{16}$ et $\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\3\end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}^{[3]}}{3!} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)}{6} = \frac{-(2-\sqrt{2})^2}{6} = \frac{-3+2\sqrt{2}}{3}$

   b) $\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix} = 1$ par convention et $\begin{bmatrix}-1\\k\end{bmatrix} = (-1)^k$ d'après la question 1d)

   c) il suffit d'ajouter les deux quotients en les réduisant au même dénominateur

d) on calcule le produit $\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ n-k \end{bmatrix} = \frac{1}{n!}\binom{n}{k} x^{[k]}y^{[n-k]}$ puis on fait la somme et on reconnaît la formule du binôme généralisée.

7. a) On fait apparaître $(-1)^{n-k} = \begin{bmatrix} -1 \\ n-k \end{bmatrix}$ dans la somme de gauche en divisant par $(-1)^n$ et on utilise la formule de Chu Vandermonde avec $y = -1$

b) $\binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{k!k!} = \frac{2^k \times 1 \times 3 \times 5 \times \ldots (2k-1)}{k!}$ d'une part et d'autre part :

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ k \end{bmatrix} = \frac{\frac{-1}{2} \times \frac{-3}{2} \times \frac{-5}{2} \times \ldots \times \frac{-1-2(k-1)}{2}}{k!} = \frac{(-1)^k \times 1 \times 3 \times 5 \times \ldots (2k-1)}{2^k k!}$$

Donc on a bien $\binom{2k}{k} = (-1)^k 4^k \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ k \end{bmatrix}$

c) on calcule le produit $\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = (-1)^k 4^k \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} 4^{n-k} \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ n-k \end{bmatrix} =$ $(-1)^n 4^n \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ n-k \end{bmatrix}$ puis on fait la somme et on reconnait la formule de Chu Vandermonde avec x=y= $\frac{-1}{2}$. On a alors $(-1)^n 4^n \begin{bmatrix} -1 \\ n \end{bmatrix} = 4^n$ car $\begin{bmatrix} -1 \\ n \end{bmatrix} = (-1)^n$.

PROBLEME 2 : Intégrale de Wallis, formule de Stirling, probabilités et somme de série

Partie A : Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt$.

1. $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dt = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)dt = [-cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.
2. (a) Soit n un entier naturel, on a : $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n+2}(t)dt$. On pose $u(t) = sin^{n+1}(t)$ et $v'(t) = sin(t)$. On a $u'(t) = (n+1)cos(t)sin^n(t)$ et $v(t) = -cos(t)$.
   Les fonctions u et v sont C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, une IPP donne donc :
   $I_{n+2} = [sin^{n+1}(t)(-cos(t))]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)cos^2(t)sin^n(t)dt = (n+1)(I_n - I_{n+2)})$
   car $cos^2(t) = 1 - sin^2(t)$ ainsi on a bien $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

   (b) On raisonne par récurrence sur l'ensemble des entiers pairs strictement positifs puis sur l'ensemble des entiers impairs pour montrer que pour tout entier naturel non nul p, $I_{2p} = \frac{1 \times 3 \times \ldots. \times (2p-1)}{2 \times 4 \times \ldots. \times (2p)} \frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2 \times 4 \times \ldots. \times (2p)}{1 \times 3 \times \ldots. \times (2p+1)}$

   (c) En faisant apparaître les factorielles au dénominateur on a bien pour tout entier naturel p non nul, $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$ et que $I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$. On vérifie que ces formules conviennent pour p = 0.
3. (a) Soit $p \geq 0$, on simplifie les formules précédentes : $I_{2p} \times I_{2p+1} = \frac{\pi}{2(2p+1)}$.

   (b) En raisonnant par disjonction de cas suivant la parité de n, on retrouve que pour tout entier naturel n, on a : $I_n \times I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$
4. (a) Soit $n \geq 0$, on a : $0 \leq I_{n+1}$ par positivité de l'intégrale, les bornes étant dans le bon ordre. Par ailleurs, $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)(sin(t) - 1)dt \leq 0$ car $sin(t) \leq 1$, les bornes étant dans le bon ordre. La suite (I_n) est décroissante et minorée donc convergente.

(b) Soit $n \geq 1$, en multipliant l'inégalité $I_{n+1} \leq I_n$ par $I_n \geq 0$ on retrouve $I_{n+1}I_n \leq {I_n}^2$. De même on a $I_n \leq I_{n-1}$ par décroissance de la suite (I_n) donc en multipliant les deux membres de cette inégalité par $I_n \geq 0$, on a bien : ${I_n}^2 \leq I_n I_{n-1}$.

(c) Finalement d'après les questions précédentes on a : $\frac{\pi}{2(n+1)} \leq {I_n}^2 \leq \frac{\pi}{2n}$ d'où $I_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

On retiendra pour la suite du problème que $\sqrt{\frac{1}{\pi p}} \sim_{+\infty} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$.

Partie B : Formule de Stirling (oraux de l'ENS)

Le but de cette partie est de justifier la formule de Stirling : $n! \sim_{+\infty} \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $u_n = \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!}$ et $v_n = ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$.

1. Soit $n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}}{e}$ donc $v_n = -1 + (n+\frac{1}{2})ln(1+\frac{1}{n})$
2. Par produit, on a, au voisinage de $+\infty$:
$(n+\frac{1}{2})ln(1+\frac{1}{n}) = (n+\frac{1}{2})(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})) = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.
On a donc le développement asymptotique suivant : $v_n = \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.
3. Par comparaison des suites à termes positifs, la série de terme général v_n étant équivalente à une série de Riemann convergente (au facteur $\frac{1}{12}$ près), elle est également convergente. Notons S sa limite.
4. Cette série est télescopique et la somme partielle de rang N est égale à $ln(u_{N+1}) - ln(u_1)$. Les suites $(ln(u_n))$ et $(u_n) = e^{ln(u_n)} > 0$ sont donc bien convergentes respectivement vers $S + ln(u_1)$ et $e^{S+ln(u_1)} > 0$.
En notant $K = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n}$ on a : $n! \sim_{+\infty} K\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n$.
5. Pour n = 2p on a : $(2p)! \sim_{+\infty} K\sqrt{2p}(\frac{2p}{e})^{2p}$ et $(p!)^2 \sim_{+\infty} K^2 p(\frac{p}{e})^{2p}$.
Ainsi $\sqrt{\frac{1}{\pi p}} \sim_{+\infty} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{K\sqrt{p}}$. On retrouve bien $K = \sqrt{2\pi}$ par identification .

Partie C : Application en probabilités (ESCP 2016)

On considère un jeu de roulette avec n issues possibles, les numéros allant de 1 à n.

Une partie est constituée d'exactement n lancers successifs de la boule.

Pour une partie donnée, on note :

- A_n l'événement "chaque numéro sort exactement une fois"
- X_i la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions du numéro i.
- S_n le nombre de boules qui ne sortent pas

1. (a) Soit n un entier naturel n non nul. Avec la formule $P(A_n) = \frac{nombredecasfavorables}{nombredecaspossibles}$ on a bien $P(A_n) = \frac{n!}{n^n}$
   (b) Avec la formule de Stirling, on a : $P(A_n) \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}n^n}{(en)^n} \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}$.
2. (a) En remarquant que $X_i = \sum_{j=1}^n b_{i,j}$ où pour tout $1 \leq j \leq n, b_{i,j} = 1$ si le numéro i sort au lancer j et 0 sinon, on reconnaît la somme de n variables indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{n}$. X_i suit donc la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{n}$. Soit $k \in [0;n]$; $P(X_i = k) = \binom{n}{k}(\frac{1}{n})^k(1-\frac{1}{n})^{n-k}$
   (b) Soient j et k deux entiers. $P_{(X_1+X_2+...+X_{n-1}=j)}(X_n = k) = 1$ si $k = n - j$ et 0 sinon. Puisque $P_{(X_1+X_2+...+X_{n-1}=j)}(X_n = k) \neq P(X_n = k)$, les variables $X_i, 1 \leq i \leq n$ ne sont pas indépendantes sinon les variables $X_1 + X_2 + ... + X_{n-1}$ et X_n le seraient d'après le lemme des coalitions.

3. (a) La variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$ est la proportion de numéros qui ne sont pas sortis au cours des n lancers. Par linéarité de l'espérance, les variables X_i étant de même loi (identiquement distribuées), on a : $E(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P(X_i = 0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P(X_n = 0) = P(X_n = 0) = (1-\frac{1}{n})^n \sim_{+\infty} e^{-1}$.
   (b) Pour n = 37, si on répète un grand nombre de fois l'expérience qui consiste à lancer 37 fois la boule, alors en moyenne, il y aura une proportion égale à $36,2\%$ de numéros qui qui ne sortirons pas.

Partie D : Application au calcul de la somme d'une série de référence

1. Soit n un entier naturel n, avec le rappel on a : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(\frac{\pi}{2}-t)dt$. En posant $u(t) = \frac{\pi}{2}-t$, u étant une fonction C^1 sur $[0;\frac{\pi}{2}]$, le changement de variable donne $I_n = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} cos^n(u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(u)du$. Ce qu'il fallait démontrer.
2. $J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2dt = [\frac{t^3}{3}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$.
3. Calculons $D_n = I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n}(t)dt$. On pose $v'(t) = 1$ et $u(t) = cos^{2n}(t)$. On a $u'(t) = -2nsin(t)cos^{2n-1}(t)$ et $v(t) = t$. Les fonctions u et v sont C^1 sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ donc $D_n = [tcos^{2n}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2ntsin(t)cos^{2n-1}(t)dt$. De nouveau on pose $f(t) = sin(t)cos^{2n-1}(t)$ et $g'(t) = t$. On a $f'(t) = cos^{2n}(t) - (2n-1)sin^2(t)cos^{2n-2}(t)$ et $g(t) = \frac{t^2}{2}$. Les fonctions f et g sont C^1 sur $[0;\frac{\pi}{2}]$. De nouveau l'expression entre crochet est nulle et ainsi $D_n = -n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2(cos^{2n}(t) - (2n-1)sin^2(t)cos^{2n-2}(t)dt = -nJ_n + n(2n-1)J_{n-1} - n(2n-1)J_n = n((2n-1)J_{n-1} - 2nJ_n)$.
4. On rappelle que $D_n = \frac{2n-1}{2n}D_{n-1}$ (résultat établi à la question 2a de la partie A). D'après la question précédente, on a pour n un entier naturel non nul :
   $Q_n = \frac{J_n}{D_n} = \frac{1}{2n^2}(n(2n-1)\frac{J_{n-1}}{D_n} - 1) = \frac{1}{2n^2}(2n^2\frac{J_{n-1}}{D_{n-1}} - 1) = \frac{1}{2n^2}(2n^2Q_{n-1} - 1)$. CQFD

5. On rappelle que pour tout $x \in [0;\frac{\pi}{2}], x \leq \frac{\pi}{2}sin(x)$. Soit n un entier naturel. Par positivité de l'intégrale, les bornes étant dans le bon ordre, on a :
   $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2cos^{2n}(t)dt \leq \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(t)cos^{2n}(t)dt = \frac{\pi^2}{4}(D_n - D_{n+1})$ autrement dit
   $J_n \leq \frac{\pi^2}{4}\frac{D_n}{2n+2}$.
6. On a alors $0 \leq Q_n = \frac{J_n}{D_n} \leq \frac{\pi^2}{4}\frac{1}{2n+2}$ donc (Q_n) converge vers 0 d'après le théorème des gendarmes.
   Soit N un entier naturel. On a : $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{N} 2(Q_{n-1} - Q_n) = 2(Q_0 - Q_N)$. Car cette somme est télescopique. En passant à la limite quand N tend vers $+\infty$ on obtient : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = 2(Q_0 - 0) = 2\frac{J_0}{D_0} = 2\frac{\frac{\pi^3}{24}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{6}$.