Eléments de correction
CB2 - HKBL 2020-2021

Exercice 1 : ORAL ESCP 2017

1. Soit $n \in \mathbb{N}, n > 2$. Pour $k \in [|0; n|]$, si $P(x) = x^k$ alors $P'(x) = kx^{k-1}$ et $P''(x) = k(k-1)x^{k-2}$.

   donc $f(P) = \frac{1}{2}(X^2-1)P'' - XP' + P = \begin{cases} 1 & \text{si k} = 0 \\ 0 & \text{si k} = 1 \\ \frac{1}{2}k(k-1)(x^k - x^{k-2}) + (1-k)x^k & \text{si k} \geq 2 \end{cases}$

2.
   - $f(P) \in \mathbb{R}_n[x]$ car $deg(f(P)) \leq max(2 + deg(P''); 1 + deg(P); deg(P)) \leq n$
   - f linéaire par linéarité de la dérivation.

3. (a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $M^2 = M$.
   Les colonnes 1 et 3 sont liées et la deuxième colonne est nulle donc $rg(f) = 2$ et $Im(f) = vect(f(1), f(x^3)) = vect(1; x^3 - 3x)$. **Remarque :** On a trouvé une famille génératrice de bon cardinal, c'est donc une base de Im(f).
   Avec le théorème du rang on a : $dim(ker(f)) = 2$.
   On remarque que $x \in ker(f)$ et $1 + x^2 \in ker(f)$. La famille $(x; 1 + x^2)$ est échelonnée en degré donc libre ainsi c'est une base de $Ker(f)$ donc on a bien $Ker(f) = Vect(x; 1 + x^2)$.

4. D'après la question 1 ; $deg(f(1)) = 0$ et pour tout $k \in [|0; n|]; k > 2$, $deg(f(P)) = k$ donc la famille $(f(1), f(x^3), f(x^4), ...f(x^n))$ est libre car échelonnée en degrés ainsi $dim(Vect(f(1), f(x^3), f(x^4), ...f(x^n)) \geq n - 1$ soit $rg(f) \geq n - 1$
   Par ailleurs $x \in ker(f)$ et $x^2 + 1 \in Ker(f)$ or la famille $(x; 1 + x^2)$ est échelonnée en degré donc libre ainsi $Vect(x; 1 + x^2) \subset Ker(f)$ et $dim(ker(f)) \geq 2$. Avec le théorème du rang on a nécéssairement $rg(f) = n - 1$ et $dim(ker(f)) = 2$ puis $ker(f) = Vect(x; x^2 + 1)$.

Exercice 2 : BCE 2020

1. (a) $\prod_{k=1}^{n} 1 + \frac{1}{k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{1}$ (produit télescopique) et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{1} = +\infty$. La suite est divergente.

   (b) $\prod_{k=1}^{n} 1 - \frac{1}{k+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$ (produit télescopique) et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. La suite est convergente.

   (c)
   $$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} 1 - \frac{1}{(k+1)^2} &= \prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} \\ &= \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \times \prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{n+2}{2} \text{ (produits télescopiques)} \end{aligned}$$

   Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$. La suite est bien convergente.

2. (a) On peut raisonner par récurrence :
   - INITIALISATION : Pour n = 1, on a bien $p_2 = 1 + \frac{1}{2}$.
   - HEREDITE : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $p_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$.
     Alors : $p_{2(n+1)} = p_{2n}u_{2n+1}u_{2n+2}$
     $= (1 + \frac{1}{2n})(1 - \frac{1}{2n+1})(1 + \frac{1}{2n+2})$
     $= \frac{(2n+1)(2n)(2n+3)}{2n(2n+1)(2n+2)}$
     $= 1 + \frac{1}{2n+2}$
   - CONCLUSION ....

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{2n} = 1$ et $p_{2n+1} = p_{2n}(1 - \frac{1}{2n+1}) = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{2n+1} = 1$.
   Les 2 suites extraites, celle de rangs pairs et celle de rangs impairs, ont la même limite donc la suite est bien convergente.

3. (a) $(1 - a^2) \prod\limits_{k=1}^{n} (1 + a^{2^k}) = (1 - a^{2^2}) \prod\limits_{k=2}^{n} (1 + a^{2^k})$ (identité remarquable)
   $= \ldots$ (même raisonnement, de proche en proche)
   $= (1 - a^{2^n})(1 + a^{2^n})$
   $= 1 - a^{2^{n+1}}$

   Remarque : Un raisonnement par récurrence est également approprié et plus rigoureux.

   (b) On montre par récurrence que $\forall n \geq 1, 2^n \geq n$ (immédiat). On a alors :

$$\begin{array}{rcll} 2^n ln(a) & \leq & nln(a) & \text{car } ln(a) < 0 \\ \iff e^{2^n ln(a)} & \leq & e^{nln(a)} & \text{car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ \iff a^{2^n} & \leq & a^n & \end{array}$$

   (c) $p = \frac{1}{1-a^2}$ par opérations sur les limites (et éventuellement d'après le théorème des gendarmes pour justifier que $\lim_{n\to+\infty} a^{2^n} = 0$).

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. On a : $a_n = u_n - 1$ et $u_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}$
   Ainsi $T_n = \frac{a_n}{p_n} = \frac{\frac{p_n}{p_{n-1}} - 1}{p_n} = \frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n}$

   (b) Soit $N \in \mathbb{N}, N \geq 2$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} T_k &= T_1 + \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{p_{k-1}} - \frac{1}{p_k} \text{(somme télescopique)} \\ &= T_1 + \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_N} \\ &= \frac{a_1 + 1}{p_1} - \frac{1}{p_N} \end{aligned}$$

   On remarque que $\frac{a_1+1}{p_1} = 1$ ainsi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} T_n = \lim\limits_{N\to+\infty} \frac{a_1+1}{p_1} - \frac{1}{p_N} = 1 - \frac{1}{p}$.

   (c) (p_n) est divergente donc $\lim\limits_{N\to+\infty} p_N = +\infty$ ainsi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} T_n = 1$ CQFD

Problème

Partie A : étude des nombres harmoniques

I Soit $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $[k-1;k]$ ainsi pour tout $x \in [k-1;k]$: $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{x}$. Alors par positivité de l'intégrale, les bornes étant dans le bon ordre on a : $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}dx$
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $[k;k+1]$ ainsi pour tout $x \in [k;k+1]$: $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$ Alors par positivité de l'intégrale, les bornes étant dans le bon ordre on a : $\int_{k}^{k+1} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k}$

II Si $n = 1$ alors l'encadrement est évident car $ln(2) \approx 0,69$
Si $n \geq 2$, alors on somme les inégalités obtenues dans la question I pour $k \in [\![2;n]\!]$:
$\int_{2}^{n+1} \frac{1}{x}dx \leq \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_{1}^{n} \frac{1}{x}dx$
En ajoutant 1 à chaque membre, il vient :
$ln(n+1) - ln(2) + 1 \leq 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq ln(n) + 1$
Il reste à remarquer que $ln(n+1) \leq ln(n+1) - ln(2) + 1$.

III (a) Par comparaison , étant donné que $\lim\limits_{n\to+\infty} ln(n+1) = +\infty$, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

(b) Par encadrement, étant donné que $ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} ln(n)$ et $ln(n)+1 \underset{+\infty}{\sim} ln(n)$, on a bien $H_n \underset{+\infty}{\sim} ln(n)$.

IV (a) Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
On a :

- $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - ln(n+1) + ln(n) = \frac{1}{n+1} + ln(1 - \frac{1}{n+1}) \leq 0$ car pour tout réel $x > 0, ln(x) \leq x - 1 \iff \forall h \in [0;1[; ln(1-h) \leq -h$ (Résultat que l'on retrouve en écrivant le DL de $ln(1-u)$ pour u proche de 0.)

- $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - ln(n+2) + ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - ln(1 + \frac{1}{n+1}) \geq 0$ car pour tout réel $h > 0, ln(1+h) \leq h$ (Résultat que l'on retrouve en écrivant le DL de $ln(1+u)$ pour u proche de 0.)

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -ln(n) + ln(n+1) = \lim\limits_{n\to+\infty} ln(1 + \frac{1}{n+1}) = 0$.

(b) On sait d'après le cours que 2 suites adjacentes convergent vers la même limite. Ces suites étant positives (question II et parce que $ln(n) \leq ln(n+1)$), la limite est bien positive.

V Comme (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante, on a pour tout entier $n \geq 1, v_n \leq \gamma \leq u_n$.
L'inégalité de droite donne $H_n - ln(n) - \gamma \geq 0$. Par ailleurs, $v_n = H_n - ln(\frac{n+1}{n}) - ln(n)$.
Ainsi l'inégalité de gauche donne $H_n - ln(n) - \gamma \leq ln(\frac{n+1}{n})$.

Partie B : le problème de Bâle

VI Soit k un entier supérieur ou égal à 2. $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{(k-1)k} \geq \frac{1}{k^2}$ car $k-1 \leq k$.

VII Soit $N \geq 1$, $\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \sum\limits_{k=2}^{N} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) + 1 = 1 - \frac{1}{N} + 1 \leq 2$ (question précédente et somme télescopique)
On a une série à termes positifs dont les sommes partielles sont croissantes et majorées par 2, donc la série est convergente d'après le théorème de la limite monotone. (De plus, d'après le théorème de comparaison, la somme de la série est inférieure ou égale à 2.)

VIII (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0; \pi]$
$\sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikt} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} e^{ikt} + e^{-ikt} = 1 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} cos(kt) = D_n(t)$ (formule d'Euler).

(b) Si $t \neq 0$, on pose $j = k + n$ on a alors
$D_n(t) = \sum\limits_{j=0}^{2n} e^{i(j-n)t} = e^{-int}\frac{1-e^{i(2n+1)t}}{1-e^{it}} = e^{-int} \times \frac{e^{\frac{2n+1}{2}it}}{e^{it/2}} \frac{2isin(\frac{2n+1}{2}t)}{2isin(\frac{t}{2})}$
(somme géométrique et angle moitié).

(c) $D_n(0) = 1 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} 1 = 1 + 2n$. REMARQUE : Par équivalents usuels, la fonction D_n est continue en 0.

IX (a) La fonction f est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ en tant que quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas. On rappelle le DL suivant :
$sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$. Ainsi $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} 1 = f(0)$ donc f est continue en 0, ainsi f est continue $[0; \frac{\pi}{2}]$
Remarque : L'équivalent suffit à répondre à cette question.

(b) $f(t) = \frac{1}{1-\frac{t^2}{6}+o(t^2)} \underset{t\to 0}{=} 1 + \frac{t^2}{6} + o(t^2)$
f admet un DL1 en 0 donc f et dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
Remarque : Etudier la limite du taux d'accroissement convient mais vous ne pourrez pas échapper aux DL.

(c) f est C^1 sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ en tant que quotient de fonctions C^1, le dénominateur ne s'annulant pas. $\forall t \in]0; \frac{\pi}{2}]$, $f'(t) = \frac{sin(t)-tcos(t)}{sin^2(t)}$
Au voisinage de 0 , on a : $sin(t) - tcos(t) = t - \frac{t^3}{6} - t(1 - \frac{t^2}{2}) + o(t^3) = \frac{t^3}{3} + o(t^3)$
Ainsi : $f'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^3/3}{t^2}$
Or $\lim\limits_{t\to 0} \frac{t^3/3}{t^2} = 0 = f'(0)$ donc f' est continue en 0 ainsi f est C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

X (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
On pose $u(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$ et $v'(t) = cos(kt)$. On a $u'(t) = \frac{t}{\pi} - 1$ et $v(t) = \frac{1}{k}sin(kt)$
u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0; \pi]$ donc une IPP donne :

$J_k = [u(t)v(t)]_0^\pi - \int_0^\pi (\frac{t}{\pi} - 1)\frac{1}{k}sin(kt)dt = -\int_0^\pi (\frac{t}{\pi} - 1)\frac{1}{k}sin(kt)dt$ car $sin(k\pi) = 0$

Une nouvelle IPP donne, en posant $f(t) = \frac{t}{\pi} - 1; g'(t) = sin(kt)$, on a
$f'(t) = \frac{1}{\pi}; g(t) = -\frac{1}{k}cos(kt)$, et les fonctions f et g sont bien $\mathscr{C}^1$ sur $[0; \pi]$:
$J_k = -\int_0^\pi (\frac{t}{\pi} - 1)\frac{1}{k}sin(kt)dt = \frac{1}{k^2}([(\frac{t}{\pi} - 1)cos(kt)]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{\pi}cos(kt)dt)$

$= \frac{1}{k^2}(0 + 1 - \frac{1}{\pi k}[sin(kt)]_0^\pi) = \frac{1}{k^2}$ car $sin(k\pi) = 0$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Par définition et d'après la question précédente,
$B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \int_0^\pi (\frac{t^2}{2\pi} - t)cos(kt)dt.$
$= \int_0^\pi \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{t^2}{2\pi} - t)cos(kt)dt$ (par linéarité de l'intégrale)
$= \int_0^\pi (\frac{t^2}{2\pi} - t) \sum\limits_{k=1}^{n} cos(kt)dt$ (la variable t est indépendante de k)
$= \int_0^\pi (\frac{t^2}{2\pi} - t)\frac{D_n(t)-1}{2}dt$ (par définition de $D_n(t)$)

(c) $\int_0^\pi t - \frac{t^2}{2\pi}dt = [\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6\pi}]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3}.$

(d) $\frac{\pi^2}{6} - B_n = \frac{1}{2}\int_0^\pi (t - \frac{t^2}{2\pi})(1 + D_n(t) - 1)dt = \int_0^\pi (t - \frac{t^2}{2\pi})D_n(t)dt$

(e) Dans l'intégrale précédente on effectue le changement de variable affine $t = 2u$. On a $dt = 2du$ ainsi :
$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2u - \frac{2u^2}{\pi})D_n(2u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2u - \frac{2u^2}{\pi})\frac{sin(2n+1)u}{sin(u)}du$ (question VIII 2 et IX : f est $\mathscr{C}^o$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$)
On a finalement : $\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)(2 - \frac{2t}{\pi})sin((2n+1)t)dt$

XI La fonction $g : t \mapsto f(t)(2 - \frac{2t}{\pi})$ convient d'après la question XIX.

XII On pose $u(t) = g(t)$ et $v'(t) = sin((2n+1)t)$.
On a $u'(t) = g'(t)$ et $v(t) = -\frac{1}{2n+1}cos((2n+1)t)$,
u et v sont C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ ainsi une IPP donne :
$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)sin((2n+1)t)dt = [-g(t)\frac{cos((2n+1)t)}{2n+1}]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\frac{cos((2n+1)t)}{2n+1}dt$
Donc avec l'inégalité triangulaire on a : $|I_n| \leq \frac{2}{2n+1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|g'(t)|}{2n+1}dt \leq \frac{2}{2n+1} + \frac{\pi}{2(2n+1)} Max_{[0;\frac{\pi}{2}]}|g'(t)|$
(la fonction g étant C^1 , sa dérivée g' est continue donc bornée sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et elle atteint ses bornes, par ailleurs $g(0) = 2$)
Le téhorème d'encadrement assure que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

XIII Ainsi par définition d'une limite, $\lim\limits_{n \to +\infty} B_n = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie C : les séries géométriques

XIV Soit $N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{N} s^k = \frac{1-s^{N+1}}{1-s} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-s}$ car $|s| < 1$.

XV (a) i. h est bien dérivable sur $[0; 1[$en tant que quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas. $\forall s \in [0; 1[; h'(s) = \frac{2}{(1-s)^3} > 0$ donc on a :

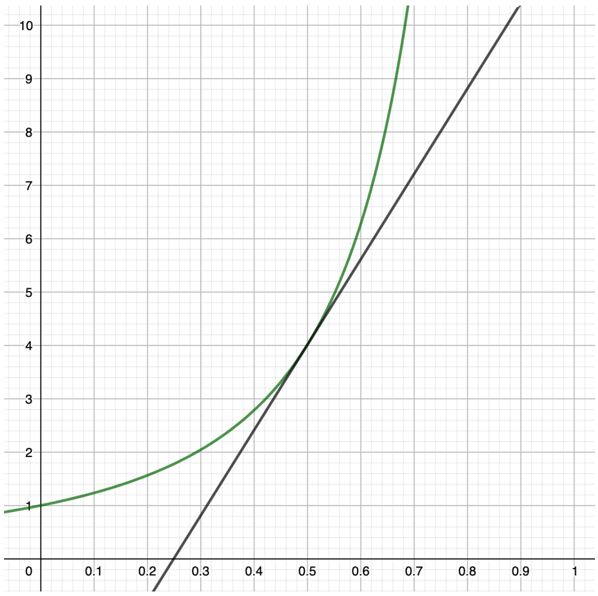
s	0		1
$h'(s)$		$+$	$\Vert$
h	1	$\nearrow$	$+\infty$

ii. $y = h'(\frac{1}{2})(s - \frac{1}{2}) + h(\frac{1}{2})$

$= 16(s - \frac{1}{2}) + 4$

$= 16s - 4$

iii. Conseil : choisir un repère non orthonormé



(b) Soit $s \in \mathbb{R}$.

- INITIALISATION : Pour $n = 1$, on a d'une part $(1-s)^2 = 1 - 2s + s^2$ et d'autre part $1 - s(1 + 1 - s) = 1 - 2s + s^2$.

- HEREDITE Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

  $(1-s)^2 \sum_{i=1}^{n} i s^{i-1} = 1 - s^n(1 + n - sn)$

  On a : $(1-s)^2 \sum_{i=1}^{n+1} i s^{i-1} = 1 - s^n(1 + n - sn) + (1-s)^2(n+1)s^n$

  $$= 1 - s^n - ns^n + ns^{n+1} + (n+1)s^n - 2(n+1)s^{n+1} + (n+1)s^{2n+2}$$

  $$= 1 - (n+1)s^n + ns^{n+1} + (n+1)s^n - 2(n+1)s^{n+1} + (n+1)s^{n+2}$$

  $$= 1 - (n+2)s^{n+1} + (n+1)s^{n+2}$$

  $$= 1 - s^{n+1}(n + 2 - (n+1)s)$$

- CONCLUSION....

(c) i. Si $|s| \geq 1$, on fait une disjonction de cas :
  - si $s > 0$ alors $\lim_{i \to +\infty} i s^{i-1} = +\infty$
  - si $s < 0$ alors $\lim_{i \to +\infty} i s^{i-1}$ n'existe pas

  donc la série diverge grossièrement donc diverge.

ii. $\lim_{n \to +\infty} s^n = 0$ puis $\lim_{n \to +\infty} n s^n = 0$ par croissances comparées.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} is^{i-1} = \frac{1}{(1-s)^2}$.

iii. Ici $s = (1-x)^2 \in [0;1[$ donc $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} i((1-x)^2)^{i-1}(1-x)^2 = \frac{(1-x)^2}{(2x-x^2)^2}$.

REMARQUES

— Attention aux noms des objets (variables, fonctions...)

— Ne cherchez pas à tout faire mais ce que vous proposez dans votre copie doit être parfaitement réalisé, ne laissez pas d'absurdité ou d'incohérence.

— Soignez la rédaction : nommez les théorèmes utilisés après avoir rappelé les hypothèses.

— Revoir les dérivées et les primitives usuelles, les DL aussi, ATTENTION aux calculs

— Retrouvez des réflexes en trigonométrie