

1 Remarque: Connaître son cours et savoir l'appliquer étaient des conditions nécessaires pour réussir cet exercice.

- Soit n un entier naturel alors $(n+2)! + n! = n!((n+2)(n+1)+1) = n!(n^2 + 3n + 3)$. La factorisation est terminée car le discriminant de $n^2 + 3n + 3$ est strictement négatif.
- Soit x un réel alors la formule du binôme de Newton donne: $(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$
- Soient a et b des réels alors $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n : " $u_n = 6 \times 2^n - 5$ "
Initialisation: Pour $n=0$ on a $6 \times 2^0 - 5 = 1 = u_0$ donc P_0 est vraie.
Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n soit vraie. Alors on a $u_{n+1} = 2u_n + 5 = 2(6 \times 2^n - 5) + 5 = 6 \times 2^{n+1} - 10 + 5 = 6 \times 2^{n+1} - 5$ donc P_{n+1} est vraie.
Conclusion: Par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n .
- On résout l'équation sur \mathbb{R} . On pose $X = x^2$, cela implique $X \geq 0$. L'équation devient $X^2 - 2X - 3 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 16$ ainsi $X = -1$ (impossible dans \mathbb{R}) ou $X = 3$. Finalement comme $X = x^2$, on cherche les réels x qui vérifient $x^2 = 3$:

$$\mathcal{S} = \left\{ \sqrt{3}; -\sqrt{3} \right\}$$

6. $\binom{10}{2} = 45$. Soit $p \in \mathbb{N}$, $\binom{p+3}{p} = \frac{(p+3)(p+2)(p+1)}{6}$

2 Remarques: Ne développez surtout pas si vous cherchez à étudier le signe d'une expression: on connaît facilement le signe d'un produit mais pas le signe d'une somme.

Le raisonnement par disjonction de cas est à éviter avec un quotient. En revanche il est nécessaire avec des valeurs absolues et des racines carrées. Il impose un raisonnement par analyse et synthèse ainsi il faut bien penser à vérifier que les solutions proposées sont dans l'intervalle dans lequel on travaille.

- Il faut que $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$. Les racines de ce polynôme sont -1 et 3 et le coefficient $a = -1 < 0$ donc $x \in [-1; 3]$.
- Si $x < 0$ alors l'équation n'a pas de solution (une racine carrée ne peut pas être strictement négative).
Si $x \geq 0$ alors en considérant les carrés de chaque membre, il reste à résoudre $-x^2 + 2x + 3 = x^2$ soit $2x^2 - 2x - 3 = 0$ dont les solutions sont $\frac{2-\sqrt{28}}{4} = \frac{1-\sqrt{7}}{2} < 0$ (ne convient pas) et $\frac{2+\sqrt{28}}{4} = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$.

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1+\sqrt{7}}{2} \right\}$$

2. Raisonnons par disjonction de cas:

Si $x+4 \leq 0$ autrement dit si $x \leq -4$ alors l'équation n'a pas de solution (une valeur absolue est positive ou nulle donc on doit travailler avec $x+4 > 0$).

Si $x+4 > 0$: 1^{er} cas: sur $[1; +\infty[$ il faut résoudre $x-1 < x+4$ soit $-1 < 4$ ce qui est vrai donc tous les réels de $[1; +\infty[$ sont solutions.

2^{eme} cas: sur $] -4; 1[$ il faut résoudre $-x+1 < x+4$ soit $\frac{-3}{2} < x$.

$$\mathcal{S} =] \frac{-3}{2}; 1[\cup [1; +\infty[=] \frac{-3}{2}; +\infty[$$

3. (a) L'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \{1; -3\}$ (on ne peut pas diviser par 0).

(b) Par ailleurs $\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x+3} = \frac{x+3-3(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{2(-x+3)}{(x-1)(x+3)}$. On a le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$
$-x + 3$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
Quotient	$+$	$ $	$-$	$ $	$+$

$$S =]-3; 1[\cup]3; +\infty[$$

$$\boxed{3} \quad S_1 = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n jk \right) = \sum_{j=1}^n j \left(\sum_{k=1}^n k \right) = \sum_{j=1}^n j \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Pour S_2 :

M thode 1

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j}^n jk \right) = \sum_{j=1}^n j \left(\sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^{j-1} k \right) = \sum_{j=1}^n j \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(j-1)j}{2} \right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j^3 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{24} [3n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1)] \\ &= \frac{1}{24} n(n+1)[3n(n+1) + 2(2n+1)] = \frac{1}{24} n(n+1)(3n^2 + 7n + 2) = \frac{1}{24} n(n+1)(3n+1)(n+2) \end{aligned}$$

M thode 2 (en  changeant les sommes)

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j}^n jk \right) = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} jk = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^k jk \right) = \sum_{k=1}^n k \left(\sum_{j=1}^k j \right) = \sum_{k=1}^n k \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^3 + k^2) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dots = \frac{1}{24} n(n+1)(3n+1)(n+2) \end{aligned}$$

Pour S_3 :

Méthode 1 (en utilisant S_2)

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j+1}^n jk \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j}^n jk - j^2 \right) = S_2 - \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{1}{24} n(n+1)(3n+1)(n+2) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{1}{24} n(n+1)[(3n+1)(n+2) - 4(2n+1)] = \frac{1}{24} n(n+1)(3n^2 - n - 2) = \frac{1}{24} n(n+1)[(3n+2)(n-1)] \end{aligned}$$

M thode 2

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j+1}^n jk \right) = \sum_{j=1}^n j \left(\sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^j k \right) = \sum_{j=1}^n j \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{j(j+1)}{2} \right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j^3 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{24} [3n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)(2n+1)] = \frac{1}{24} n(n+1)[3n(n+1) - 2(2n+1)] \\ &= \frac{1}{24} n(n+1)[(3n+2)(n-1)] \end{aligned}$$

4

$$1. \quad u_2 = \frac{2u_1u_0}{3u_0 - u_1} = \frac{4}{6-1} = \frac{4}{5} \text{ et } u_3 = \frac{2u_2u_1}{3u_1 - u_2} = \frac{\frac{8}{5}}{3 - \frac{4}{5}} = \frac{8}{11}$$

2. On note pour tout entier n , P_n : " $u_n \neq 0$ "

Initialisation: $u_0 = 2 \neq 0$ et $u_1 = 1 \neq 0$ donc P_0 et P_1 sont vraies.

Hérité: Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que P_n et P_{n+1} sont vraies. Alors $2u_{n+1}u_n \neq 0$ donc on a bien

$$u_{n+2} = \frac{2u_{n+1}u_n}{3u_n - u_{n+1}} \neq 0$$

Conclusion: Par une récurrence double, on a montré que pour tout entier n , $u_n \neq 0$.

3.

Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+2}} - \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{3u_n - u_{n+1}}{2u_{n+1}u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{3u_n - u_{n+1} - 2u_n}{2u_{n+1}u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{2u_{n+1}u_n}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{u_n}{u_{n+1}u_n} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}u_n} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \right) = \frac{1}{2} v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique. On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_0}\right) \frac{1}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{2}$$

Mais aussi, en revenant à la définition de (v_n) , on obtient (en reconnaissant une somme télescopique) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{2}$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{2} \implies \frac{1}{u_n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} = \frac{3 \times 2^{n-1} - 1}{2^n} \implies u_n = \frac{2^n}{3 \times 2^{n-1} - 1}$$

5

- Soit $n \geq 1$. On a $u_{n+1} - u_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+2} + \frac{-1}{2n+1} = \frac{-1}{(2n+2)(2n+1)}$
- On étudie le signe de : $u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{(2n+2)(2n+1)} < 0$. La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est donc décroissante.
- Une suite décroissante est majorée par son premier terme donc pour tout entier naturel non nul n on a : $u_n \leq u_1$ et $u_1 = S_2 = -1 + \frac{1}{2} = \frac{-1}{2}$. La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est majorée par $\frac{-1}{2}$.

BONUS Soient a et b des réels. Par symétrie des r les joués par a et b on peut supposer que $a \geq b$. Alors $|a - b| = b - a$ ainsi $\min(a, b) = a = \frac{a+b-|a-b|}{2}$ et $\max(a; b) = b = \frac{a+b+|a-b|}{2}$

SI VOUS VOUS ENNUYEZ

- $S_{0,n} = \sum_{k=1}^n k^0 = \sum_{k=1}^n 1 = n$
- (a) Avec le changement d'indice $j = n + 1 - k$ on a $k = n + 1 - j$ et $S_{1,n} = \sum_{k=1}^n k = \sum_{j=1}^n (n + 1 - j)$
 - On a donc $S_{1,n} = \sum_{j=1}^n (n + 1) - S_{1,n}$. Ainsi on retrouve que $2 \times S_{1,n} = n(n + 1)$
- (a) Avec le changement d'indice $j = k + 1$ on a $\sum_{k=1}^n (k + 1)^2 = \sum_{j=2}^{n+1} j^2 = S_{2,n} - 1 + (n + 1)^2$
 - Par ailleurs $\sum_{k=1}^n (k + 1)^2 = \sum_{k=1}^n (k^2 + 2k + 1) = S_{2,n} + 2 \times S_{1,n} + n$
 - D'après les questions précédentes on a : $S_{2,n} - 1 + (n + 1)^2 = S_{2,n} + 2 \times S_{1,n} + n$ donc on retrouve $2 \times S_{1,n} = (n + 1)^2 - 1 - n = n^2 + n = n(n + 1)$
- Soit $p \geq 1$.

On a d'une part avec le changement d'indice $j = k + 1$: $\sum_{k=1}^n (k + 1)^{p+1} = \sum_{j=2}^{n+1} (j)^{p+1} = S_{p+1,n} - 1 + (n + 1)^{p+1}$

On a d'autre part avec la formule du Binôme: $\sum_{k=1}^n (k + 1)^{p+1} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} k^j\right)$ or $\binom{p+1}{p+1} = 1$ et $\binom{p+1}{p} = p + 1$ donc on a :

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} k^j \right) = S_{p+1,n} + (p+1)S_{p,n} + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} k^j \right) = S_{p+1,n} + (p+1)S_{p,n} + \sum_{j=0}^{p-1} \left(\binom{p+1}{j} \left(\sum_{k=1}^n k^j \right) \right) = S_{p+1,n} + (p+1)S_{p,n} + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_{j,n}$$

On retrouve bien que $(p+1)S_{p,n} = -1 + (n+1)^{p+1} - \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_{j,n}$

5. On applique la formule précédente avec $p = 2$ puis $p = 3$ et enfin $p = 4$. On retrouve tous calculs faits:
 $S_{2,n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $S_{3,n} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$; $S_{4,n} = \frac{12n^5+30n^4+20n^3-2n}{60}$

6. Soit $p \geq 1$. Raisonnons par analyse et synthèse:

supposons qu'il existe un entier m tel que $S_{p,2} = m^2 = 1 + 2^p$ alors $2^p = m^2 - 1 = (m+1)(m-1)$
 $m+1$ et $m-1$ divise une puissance de 2 donc $m+1$ et $m-1$ sont des puissances de 2. De plus $m+1$ et $m-1$ sont des entiers de même parité car ils encadrent un même nombre entier m . $m+1$ et $m-1$ sont donc nécessairement des nombres pairs qui se suivent dans la liste des nombres pairs. La seule possibilité est $m+1 = 4$ et $m-1 = 2$ donc $2^p = (m+1)(m-1) = 8$ ainsi $p = 3$. Réciproquement on a vérifié dans la question précédente que $S_{3,n} = (S_{1,n})^2$ donc $p = 3$ convient et c'est bien le seul.