

Bonjour à tous, pour ce devoir surveillé vous allez vous auto-évaluer. Pour cela vous avez accès au corrigé, au barème ci-dessous et au tableau de notes anonymées. Si vous ne parvenez pas à modifier le tableau sur le site, téléchargez-le et renvoyez-le moi. Repérez bien votre numéro d'anonymat et complétez la bonne ligne. Si vous n'arrivez pas du tout à compléter le tableau ce n'est pas grave, vous pouvez m'envoyer le détail de vos points question par question, exercice par exercice en utilisant le barème, inutile de faire les totaux, le classeur excel s'en chargera. N'hésitez pas à me poser des questions si certains points ne sont pas clairs.

Deadline : 25 avril 2020

### Barème du DS3 (sur 90 points)

**Exercice 1 (/5 coef 0,5):** 1 point par affirmation

si « A implique B » est vraie alors A est suffisante pour B ;

si « B implique A » est vraie alors A est nécessaire à B.

**Problème 1 (/35 coef 0,2):**

1a) 1 point pour  $(A-I)^2$  ;

1 point pour  $A^{-1}$  en fonction de A et I

1b) 1 point pour  $\text{Ker}(A)=\{0\}$  ;

1 point pour  $\text{rg}(A)=3$

1c) 1 point pour bijective (ou surjective et injective)

2a) 0,5 pour reconnaître Newton ;

0,75 pour  $A^n$  en fonction de I et N

et 0,75 pour  $A^n$  en fonction de I et A

2b) 1 point : 0,5 pour chaque membre de l'égalité calculé séparément

3a) 1 pour  $A-I=N$

3b) 1 pour  $u_1$

et 1 pour  $u_2$

3c) 1

3d) 1 pour théorème du rang ;

1 pour famille de 2 vecteurs non colinéaires ;

1 pour conclusion

4a) 1,5 pour famille libre (ou  $e_1$  n'est pas dans  $\text{Vect}(u_1 ; u_2)$ )

et 0,5 pour le bon cardinal

4b) 1 point pour  $f(u_1)$  ;

1 pour  $f(u_2)$

et 1 pour  $f(e_1)$

4c) 2 pour  $P^{-1}$  ;

1 pour PT

et 1 pour  $(PT) P^{-1}$  .

5a) 1

5b) 0,5 point pour vérifier que c'est un sous ensemble de  $M_3(\mathbb{R})$  ;  
0,5 point pour vérifier qu'il est non vide (la matrice nulle est dedans) ;  
2 points pour la stabilité par combinaison linéaire.

5c) 0,5 pour le calcul de MT ;  
0,5 pour le calcul de TM ;  
1 point pour système

5d) 0,5 pour justifier que la famille est libre ;  
0,5 pour la dimension

5e) de 0,5 à 2 points suivant l'avancée du raisonnement par équivalence

5f) de 0,5 à 2 points suivant l'avancée du raisonnement

**Exercice 2 (/10 coef 0,5):**

1) 0,5 pour la dimension  
et 1,5 pour une base

2) 1 pour stabilité par combinaison linéaire  
et 1 pour vérifier que  $f(P)$  est polynômiale de degré plus petit que 3

3) 2 points : 0,5 par vecteur colonne (calcul de  $f(1)$  ;  $f(x)$  ;  $f(x^2)$  ;  $f(x^3)$ )

4) 1,5 pour le rang ;  
0,5 pour non surjective

5) 0,5 pour le th du rang ;  
0,5 pour la dimension de  $\ker(f)$   
et 1 pour une base de  $\ker(f)$ .

**Problème 2 (/40 coef 0,2):**

A1a) 0,5 point pour l'étude de  $v_{n+1}-v_n$  ;  
1,5 point pour justifier que c'est positif

A1b) 1 point pour remarquer que  $u_n \leq l$  ;  
1 point pour conclure

A1c) 0,75 point pour convergente  
0,25 pour remarquer que la limite est inférieure ou égale à  $l$   
(0 à cette question si vous affirmez déjà que la limite est  $l$ )

A2a) 1 point pour écrire correctement  $v_{2n}$  ;  
0,5 point pour faire apparaître  $v_n$  ;  
0,5 point pour faire apparaître  $u_n$

A2b) 1 point pour passer à la limite dans l'inégalité précédente ;  
1 point pour conclure compte tenu qu'on a aussi  $v_n \leq l'$  d'après A1c)

B1) 1 par définition d'une limite finie

B2) 0,5 point pour couper la somme en 2  
et 0,5 point pour l'inégalité triangulaire

B3) 1 point pour la première inégalité :  
0,5 pour sommer les inégalités de la question C1)  
et 0,5 pour remarquer que  $\frac{n-N}{n} \leq 1$

1 point pour la deuxième inégalité :

0,5 point pour évoquer la limite de  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |u_k - l|$  quand n tend vers  $+\infty$   
et 0,5 point pour prendre le  $\max(N, M)$

B4) 1 point pour reconnaître la définition de la limite d'une suite

C1a) 0,5 pour l'initialisation à  $n=1$  ;  
0,5 pour l'HR correctement écrite ;  
0,5 point pour la transmission au rang  $n+1$  ;  
0,5 pour la conclusion.

C1b) 2 points méthode au choix : récurrence ou étude du signe de  $u_{n+1} - u_n$  ou  
comparaison de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  avec 1.

C1c) 1 point pour évoquer le théorème de la limite monotone (suite croissante  
majorée) ;  
2 points pour la résolution de  $f(l)=l$

C2a) 1 point pour quotient dont le dénominateur ne s'annule pas

C2b) 1 point pour le calcul ;  
1 point pour la limite par opérations

C2c) 0,5 point pour faire référence à la partie B ;  
1 point pour transformer la somme télescopique et  
0,5 point pour retrouver la limite de  $nw_n$

C2d) 1 point pour l'équivalent  
et 1 pour série divergente par équivalence à la série harmonique.

C2e) 1 point pour modifier somme partielle  
et 1 point pour la conclusion

D1a) 0,5 pour l'initialisation à  $n=0$  ;  
0,5 pour l'HR correctement écrite ;  
0,5 point pour la transmission au rang  $n+1$  ;  
0,5 pour la conclusion.

D1b) 1 point pour variations (méthode au choix : récurrence ou étude du signe de  $u_{n+1} - u_n$  ou comparaison de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  avec 1) ;

0,25 point pour évoquer le théorème de la limite monotone (suite décroissante minorée) ;

0,75 point pour la résolution de  $f(l)=l$

D2a) 1 point pour quotient dont le dénominateur ne s'annule pas

D2b) 0,5 point pour le calcul de  $v_n$  ;

0,5 point pour la limite par opérations.

0,5 point pour faire référence à la partie B ;

1,5 point pour remarquer que la série de terme général  $v_n$  diverge grossièrement

D2c) 1 point pour travailler avec  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k$  et reconnaître une somme télescopique ;

0,5 point pour l'équivalent

et 0,5 pour série divergente par équivalence à la série harmonique.