Concours blanc

Exercice 1 : Pour s'échauffer

1. Soit x un réel tel que $x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On a :
$1 + tan^2(x) = 1 + \frac{sin^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{cos^2(x)}{cos^2(x)} + \frac{sin^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{cos^2(x)+sin^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)}$.

2. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = xln(x) - x + 1$. f est dérivable en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0, f'(x) = ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = ln(x)$.
On a donc le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi, $\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in]0;+\infty[, xln(x) \geq x - 1$.

3. $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}dx = [x - Arctan(x)]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$.

4. On pose $u(x) = ln(x)$ et $v'(x) = x^2$. u et v sont C^1 sur $[1;e]$ et on a $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{x^3}{3}$ ainsi :
$\int_1^e x^2 ln(x)dx = [\frac{x^3}{3}ln(x)]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}[\frac{x^3}{3}]_1^e = \frac{2e^3+1}{9}$

5. (a)
   - Pour n= i on a d'une part : $\sum\limits_{j=i}^{i} \binom{j}{i} = \binom{i}{i} = 1$ et d'autre part $\binom{i+1}{i+1} = 1$ donc la propriété est vraie pour n= i.
   - Soit n un entier naturel supérieur ou égal à i. On suppose que l'égalité est vraie pour cet entier n. Montrons que l'égalité reste vraie au rang suivant ie $\sum\limits_{j=i}^{n+1} \binom{j}{i} = \binom{n+2}{i+1}$.
   On a : $\sum\limits_{j=i}^{n+1} \binom{j}{i} = \binom{n+1}{i} + \sum\limits_{j=i}^{n} \binom{j}{i} = \binom{n+1}{i} + \binom{n+1}{i+1} = \binom{n+2}{i+1}$ (d'après la formule de Pascal).
   - Par récurrence, la propriété est vraie $\forall n \geq i$. On a bien $\forall n \geq i$: $\sum\limits_{j=i}^{n} \binom{j}{i} = \binom{n+1}{i+1}$.

   (b) $$\begin{aligned}\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \binom{j}{i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} \binom{n+1}{i} &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} - \binom{n+1}{1} - \binom{n+1}{0} \\ &= (1+1)^{n+1} - (n+1) - 1 \\ &= 2^{n+1} - n - 2\end{aligned}$$

Exercice 2 : Trigonométrie

1. Avec les formules d'Euler on a :

- $$\begin{aligned}cos^3(x) = (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^3 = \frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8} &= \frac{1}{4}\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + \frac{3}{4}\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\ &= \frac{1}{4}cos(3x) + \frac{3}{4}cos(x)\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}sin^3(x) = (\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^3 = \frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{-8i} &= \frac{-1}{4}\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} + \frac{3}{4}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \\ &= \frac{-1}{4}sin(3x) + \frac{3}{4}sin(x)\end{aligned}$$

2. (a) Avec la question précédente on a :
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}cos(3x) + \frac{3}{4}cos(x)dx &= [\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}sin(3x) + \frac{3}{4}sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{1}{12} + \frac{3}{4} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

(b) On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = sin(x)cos^2(x)$. u et v sont C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et on a $u'(x) = 1$ et $v(x) = -cos^3(x)$. Alors avec une IPP on obtient :
$I = [x(-cos^3(x))]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -cos^3(x)dx = 0 + \frac{2}{3}$

3. (a) Soit $E = sin(3x)cos^3(x) + cos(3x)sin^3(x)$, d'après la question 1) :

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{4}sin(3x)(cos(3x) + 3cos(x)) + \tfrac{1}{4}cos(3x)(-sin(3x) + 3sin(x)) \\ &= \tfrac{3}{4}sin(3x)cos(x) + \tfrac{3}{4}cos(3x)sin(x) \\ &= \tfrac{3}{4}(sin(3x)cos(x) + cos(3x)sin(x)) \\ &= \tfrac{3}{4}sin(3x + x) \\ &= \tfrac{3}{4}sin(4x) \end{aligned}$$

(b) D'après ce qui précède, il s'agit de résoudre l'équation suivante :
$\frac{3}{4}sin(4x) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow sin(4x) = 1 = sin(\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow$ il existe un entier relatif k tel que $4x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k.\frac{\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$.
En donnant à k les valeurs 0, 1, 2 et 3 on trouve les solutions sur $[0; 2\pi[$:

$$\mathscr{S} = \{\tfrac{\pi}{8}; \tfrac{5\pi}{8}; \tfrac{9\pi}{8}; \tfrac{13\pi}{8}\}.$$

Problème 1 : Etude d'une fonction

Partie A

1. f est C^2 sur $]0; +\infty[$ en tant que somme et quotient de fonctions C^2 sur $]0; +\infty[$.
2. D'après la question 1), f est nécessairement C^0 sur $]0; +\infty[$. Etudions la continuité de f en 0^+ : on sait que $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ ainsi $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$ donc f est continue sur $[0; +\infty[$.
3. $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{e^x}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.
4. (a) D'après la question 1), f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$ on a : $f'(x) = \frac{1(e^x-1)-xe^x}{(e^x-1)^2} = \frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}$

   (b) Au voisinage de 0 on a : $e^x - 1 - xe^x = x + \frac{x^2}{2} - x(1+x) + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ ainsi $f'(x) \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$

   (c) $f'(x) = \frac{1}{e^x-1} - \frac{xe^x}{(e^x-1)^2}$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x-1} = 0$ et $\frac{xe^x}{(e^x-1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{xe^x}{(e^x)^2} = \frac{x}{e^x}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{(e^x-1)^2} = 0$ ainsi par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

Partie B

1. On pose pour $x > 0, h(x) = e^x - 1 - xe^x$. On a $h'(x) = e^x - (e^x + xe^x) = -xe^x$ et $f''(x) = \frac{-xe^x(e^x-1)^2-(e^x-1-xe^x)2e^x(e^x-1)}{(e^x-1)^4} = \frac{e^x(e^x-1)[-x(e^x-1)-2(e^x-1-xe^x)]}{(e^x-1)^4} = \frac{e^x g(x)}{(e^x-1)^3}$ où $g(x) = xe^x + x + 2 - 2e^x$
2. (a) $g'(x) = e^x + xe^x + 1 - 2e^x$ et $g''(x) = xe^x > 0$ sur $]0; +\infty[$.

   (b) g' est strictement croissante et $\lim\limits_{x \to 0^+} g'(x) = 0$ ainsi pour tout $x > 0, g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$ ainsi pour tout $x > 0, g(x) > 0$ donc $f''(x) > 0$.
3. Ainsi f' est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Or on sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \frac{-1}{2}$.
4. Ainsi pour tout $x > 0, f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ à valeurs dans $]0; 1]$.

Partie C

1. (a) Soit $x > 0$, alors d'après l'étude réalisée dans la partie B à la question 3., $|f'(x)| = -f'(x) \leq \lim_{x \to 0} -f'(x) = \frac{1}{2}$ car $-f'$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

   (b) D'après l'étude de la fonction f réalisée dans la partie B à la question 4., f est bien à valeurs dans $]0; 1]$.

2. Pour $x > 0, f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{e^x-1} = x \Leftrightarrow \frac{x(2-e^x)}{e^x-1} = 0$
   $\Leftrightarrow x = 0$ (ne convient pas) ou $e^x = 2 \Leftrightarrow x = ln(2)$.
   L'équation $f(x) = x$ admet bien une seule solution sur $]0; +\infty[$ et on a : $S = \{ln(2)\}$

3. f est continue sur $[0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall t \in]0; +\infty[, |f'(t)| \leq \frac{1}{2}$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour tous réels $x, y > 0$: $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$

4. (a) En particulier pour $y = ln(2) > 0$, on a : $|f(x) - f(ln(2))| \leq \frac{1}{2}|x - ln(2)|$ or on sait que $f(ln(2)) = ln(2)$ d'après la question 2.
   Ainsi pour tout $x > 0, |f(x) - ln(2)| \leq \frac{1}{2}|x - ln(2)|$. Soit n un entier naturel. Pour $x = u_n$, on retrouve l'inégalité proposée.

   (b)
   - Pour n= 0, $\frac{1}{2^0} = 1$ donc la propriété est vraie pour n= 0.
   - Soit n un entier naturel fixé. On suppose que l'inégalité est vraie pour cet entier. Montrons que l'inégalité reste vraie au rang suivant c'est-à-dire : $|u_{n+1} - ln(2)| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}|u_0 - ln(2)|$.
     On sait d'après la question 4.a) et par hypothèse de récurrence que :
     $|u_{n+1} - ln(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - ln(2)| \leq \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2})^n|u_0 - ln(2)|$
   - Par récurrence, l'inégalité est vraie pour tout entier naturel n.

   (c) $(\frac{1}{2})^n|u_0 - ln(2)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $|\frac{1}{2}| < 1$ ainsi d'après le théorème de passage à la limite dans une inégalité, (u_n) est convergente de limite $ln(2)$.

Problème 2 : Intégrale et fonction
Partie A

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 \geq 0$ donc la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[1; +\infty[$. La fonction $Arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Donc par composition la fonction$f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Le domaine de définition de f est bien centré en 0 et la fonction f est paire par parité de la fonction carrée. En effet :
   $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = Arctan(\sqrt{(-x)^2 + 1}) = Arctan(\sqrt{x^2 + 1}) = f(x)$.

3. **Méthode 1 :** g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ par composition de fonctions strictement croissantes (la fonction carrée, une fonction linéaire, la fonction racine carrée et la fonction $Arctan$.)
   Méthode 2 : g est dérivable sur $[0; +\infty[$ en tant que composée de fonctions dérivables et on a : $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} > 0$
   Conclusion : g admet le tableau de variations suivant :

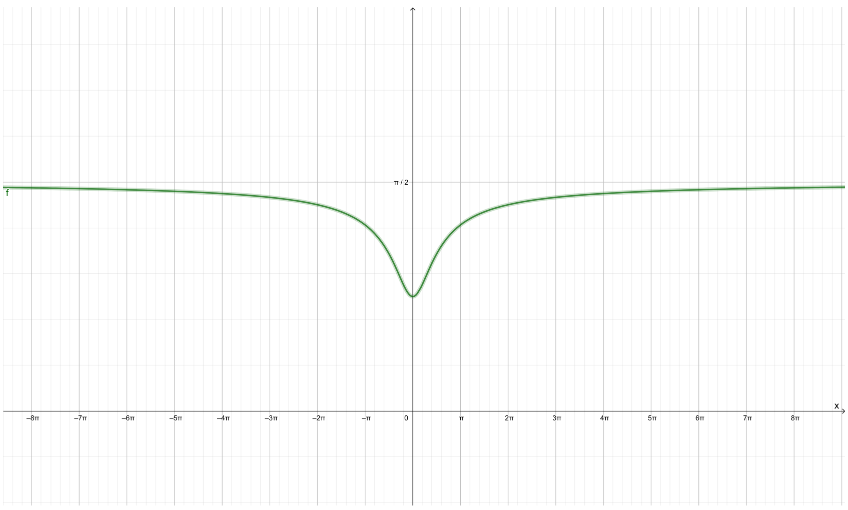
x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0 $+$	
g	0 $\nearrow$	$+\infty$

sur $[0;+\infty[$, $f = Arctan(g)$ donc par composition f est strictement croissante. $f(0) = Arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ car $tan(\frac{\pi}{4}) = 1$. Par composition, en posant $X = \sqrt{x^2+1}$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} Arctan(X) = \frac{\pi}{2}$

Par parité enfin, on obtient le tableau de variations suivant sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\frac{\pi}{2}$ $\searrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$ $\frac{\pi}{2}$

4. Au point d'abscisse 0, la courbe de f admet pour tangente la droite d'équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ soit $y = f(0) = \frac{\pi}{4}$.



5.

6. La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $1,5 \in]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}[$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$.

Partie B

1. On pose $h(x) = x\ Arctan(x) - ln(\sqrt{x^2+1})$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}$:
$h'(x) = Arctan(x) + \frac{x}{x^2+1} - \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}} = Arctan(x) + x \times \frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1} = Arctan(x)$.
Nous avons bien montré que h est une primitive de $Arctan$.
2. On pose $\varphi(x) = \sqrt{x^2+1}$. φ est C^1 sur $[\frac{1}{2};1]$ et on a $du = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$.
Pour $x = \frac{1}{2}, u = \sqrt{(\frac{1}{2})^2+1} = \sqrt{\frac{5}{4}}$ et pour $x = 1, u = \sqrt{2}$ ce qui donne :
$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{\frac{5}{4}}}^{\sqrt{2}} Arctan(u)du &= [u\ Arctan(u) - ln(\sqrt{u^2+1})]_{\sqrt{\frac{5}{4}}}^{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2}Arctan(\sqrt{2}) - ln\sqrt{3} - \sqrt{\tfrac{5}{4}}\ Arctan(\sqrt{\tfrac{5}{4}}) + ln(\sqrt{\tfrac{5}{4}+1}) \\ &= \sqrt{2}Arctan(\sqrt{2}) - \sqrt{\tfrac{5}{4}}\ Arctan(\sqrt{\tfrac{5}{4}}) + ln(\tfrac{\sqrt{3}}{2})\end{aligned}$$