Diagonalisation

K30.1 **Manon V.**

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice M est-elle inversible ? diagonalisable ?

K30.2 **Marie, Mathilde B.**

Expliquer sans calculs pourquoi la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

K30.3 **Camille, Cécile, Claire, Constance Be.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de cette matrice ainsi qu'une base des sous-espaces propres associés.
2. Montrer que cette matrice est diagonalisable. La diagonaliser.
3. Donner la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

K30.4 **Adèle, Damien**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer les éléments propres de A. Est-elle diagonalisable ?

K30.5 **Martin, Mathilde L.**

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer les éléments propres de A. Est-elle diagonalisable ?

K30.6 **Juliette**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A est-elle diagonalisable ?

K30.7 **Jean-Damien, Manon P.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice A est-elle diagonalisable ?

K30.8 **Inès**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A est-elle diagonalisable ?

K30.9 **Manon V., Marion**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 6 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice A est-elle diagonalisable ?

K30.10 **Constance Bo., Matthieu P.**

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de f ainsi qu'une base des sous-espaces propres associés.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

K30.11 **Cécile, Claire**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A$.
2. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

K30.12 **Alexandre, Capucine, Inès**

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M.

1. Montrer que $(\overrightarrow{u})$ avec $\overrightarrow{u} = (1, 2, -1)$ forme une base de $\mathrm{Ker}(f)$
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(Id - f)$
3. En déduire que M est diagonalisable. Donner la base dans laquelle la matrice de f est diagonale et donner cette dernière.

K30.13 **Juliette, Manon V.**

Soient a et b deux réels et

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice M soit diagonalisable.

K30.14 **Matthieu P.**

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Expliciter une matrice diagonale D semblable à A.
2. Déterminer une matrice E telle que $E^3 = D$. En déduire une matrice B telle que $B^3 = A$.

K30.15 **Marie, Mathilde B.**

1. Montrer que la matrice A définie par :
$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$
est diagonalisable.
2. En déduire l'expression de A^n pour tout entier naturel n.

K30.16 **Claire**

1. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et expliciter une matrice diagonale D semblable à A.
2. Soit k un entier naturel non nul. Calculer D^k et en déduire A^k.
3. On considère les suites (v_n) et (w_n) déinies par les relations de récurrence :
$$\begin{cases} v_0 = 2,\ w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 3w_n + v_n \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = 3v_n + w_n \end{cases}$$
   (a) On pose $T_n = \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Exprimer T_{n+1} en fonction de A et T_n. En déduire T_n en fonction de n.
   (b) En déduire l'expression de v_n et w_n en fonction de n;

K30.17 **Mathilde B.**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 = 2A - I$, où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que A admet une seule valeur propre. Déterminer le sous-espace propre associé.
3. On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$:
$$v_1 = (1, 0, -1), \quad v_2 = (1, -1, 1), \quad v_3 = (0, 1, -1)$$
Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Montrer que A est semblable à la matrice :
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

K30.18 Martin, Mathilde L.

Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$, qui à tout polynôme P associe $P(0)X^2 + P'(X)$.

1. Montrer que ϕ est linéaire et déterminer son spectre.
2. ϕ est-elle diagonalisable ?

K30.19 Adèle, Damien

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et soit φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à M associe $A\ {}^tM$.

1. Montrer que φ est linéaire et étudier sa diagonalisabilité.
2. Montrer que $A^2 = 0$ puis que $\varphi^3 = 0$ et retrouver le résultat de la question précédente concernant la réduction de φ.

K30.20 Constance Be.

Soit ϕ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui à toute matrice M associe ${}^tM - 2M$.

Montrer que ϕ est linéaire et étudier sa diagonalisabilité.

K30.21 Jean-Damien, Manon P.

On considère une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est nulle sauf sur la première colonne, la diagonale principale et la dernière colonne où on place des 1 (elle a la forme d'un "N").

1. Déterminer le rang de N. Peut-on déjà en déduire une valeur propre pour N ?
2. Déterminer toutes les valeurs propres de N. Montrer que N est diagonalisable.

K30.22 Marion

Soient $a_1, \ldots, a_n, \lambda$ des réels et :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & & a_1 \\ & \ddots & & a_2 \\ & & \lambda & \vdots \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a_1, \ldots, a_n, \lambda$ pour que la matrice A soit diagonalisable.