Diagonalisation

K29.1 **Quentin P., Teresa**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Trouver les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

K29.2 **Léa, Matthieu P., Tom**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de cette matrice ainsi qu'une base des sous-espaces propres associés.
2. Montrer que cette matrice est diagonalisable. La diagonaliser.
3. Donner la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

K29.3 **Caroline, Quentin P.**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Trouver les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

K29.4 **Mathilde M., Noëlle**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés. A est-elle diagonalisable ? inversible ?

K29.5 **Alice, Emma**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice A est-elle diagonalisable ?

K29.6 **Nicolas**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A est-elle diagonalisable ?

K29.7 **Quentin F.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est-elle diagonalisable ?

K29.8 **Justine, Matthieu B.**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 6 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice A est-elle diagonalisable ?

K29.9 **Benjamin, Emile**

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres de f ainsi qu'une base des sous-espaces propres associés.

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

K29.10 **Anastasia, Léa, Matthieu P., Tom**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A$.
2. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

K29.11 **Quentin F.**

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(x,y,z) = (y-z, -x+2y-z, x-y+2z)$$

1. Déterminer M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $M^2 - 3M + 2I_3$.
3. Montrer que M est inversible et calculer son inverse.
4. Etudier la diagonalisabilité de M.

K29.12 **Juliane, Nicolas**

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M.

1. Montrer que $(\overrightarrow{u})$ avec $\overrightarrow{u} = (1,2,-1)$ forme une base de $\text{Ker}(f)$
2. Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(Id - f)$
3. En déduire que M est diagonalisable. Donner la base dans laquelle la matrice de f est diagonale et donner cette dernière.

K29.13 **Anastasia**

Soit m un réel et soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

Déterminer en fonction de la valeur de m si la matrice A est diagonalisable.

K29.14 **Alice, Justine**

Soient a et b deux réels et

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice M soit diagonalisable.

K29.15 **Benjamin, Emile**

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
2. En déduire une matrice B telle que $B^3 = A$.

K29.16 **Théophile**

1. Montrer que la matrice A définie par :
$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$
est diagonalisable.
2. En déduire l'expression de A^n pour tout entier naturel n.

K29.17 **Teresa**

Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par :

$$\phi(P) = P''(0) + P'(0)X + P(0)X^2$$

Trouver les valeurs propres de ϕ.
L'application ϕ est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

K29.18 **Mathilde M., Noëlle**

Soit ϕ l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\phi(M) = {}^tM$$

Trouver les valeurs propres de ϕ.
L'application ϕ est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

K29.19 **Caroline, Quentin P.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Soit ϕ l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\phi(M) = AM + MA$$

1. Calculer A^2.
2. Donner la matrice de ϕ dans les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.
3. Montrer que $\phi^3 = 0$.
4. ϕ est-elle diagonalisable ? Inversible ?

K29.20 Alice, Emma

On considère une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est nulle sauf sur la première colonne, la diagonale principale et la dernière colonne où on place des 1 (elle a la forme d'un "N").

1. Déterminer le rang de N. Peut-on déjà en déduire une valeur propre pour N ?

2. Déterminer toutes les valeurs propres de N. Montrer que N est diagonalisable.

K29.21 Justine

Soient $a_1, \ldots, a_n, \lambda$ des réels et :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & & a_1 \\ & \ddots & & a_2 \\ & & \lambda & \vdots \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a_1, \ldots, a_n, \lambda$ pour que la matrice A soit diagonalisable.