Matrices d'applications linéaires

K28.1 **Adèle, Marie**

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x,y,z) = (2x - y + z, z, y - x)$$

Déterminer le rang, le noyau et l'image de f.

K28.2 **Alexandre**

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(x,y,z) = (3x - y + z, x - 3y - z, x + 5y + 3z)$$

Ecrire la matrice B de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer le rang de f, une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

K28.3 **Camille, Manon P., Manon V.**

Calculer le rang et déterminer l'image et le noyau de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

K28.4 **Mathilde B.**

Calculer le rang et déterminer l'image et le noyau de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

K28.5 **Juliette**

Calculer le rang et déterminer l'image et le noyau de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

K28.6 **Inès, Marion**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative aux bases canoniques est A.

1. Pour tout élément (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, déterminer $f(x,y,z)$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

K28.7 **Capucine, Jean-Damien**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relative aux bases canoniques est A. Déterminer le rang de f, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

K28.8 **Constance Be.**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associé à la matrice A. Déterminer le rang de f, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

K28.9 **Caroline, Damien, Martin, Mathilde M.**

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à M.

1. Montrer que $(\overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u} = (1,2,-1)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$
2. Soient $\overrightarrow{v} = (1,0,-1)$ et $\overrightarrow{w} = (1,-1,0)$. Calculer leurs images par f.
3. Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans celle-ci.
4. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(Id - f)$.

K28.10 Jean-Damien

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$f(x,y,z,t) = (x-y+2z-2t, z-t, x-y+z, x-y+z)$$

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. (a) Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$ et montrer qu'il est engendré par $\overrightarrow{u} = (1,1,0,0)$.
   (b) Déterminer un vecteur $\overrightarrow{v} = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}$ et $b = 1$.
   (c) Soit G l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{R}^4$ vérifiant $f(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et que G est engendré par $\overrightarrow{r} = (0,0,1,1)$.
   (d) Déterminer un vecteur $\overrightarrow{s} = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $f(\overrightarrow{s}) = \overrightarrow{s} + \overrightarrow{r}$ et $c = 1$.
3. Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{r}, \overrightarrow{s})$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et écrire la matrice de f dans cette base.

K28.11 Inès, Marion

Soit f l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ telle que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P) = P(X+1) - P(X)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire la matrice de f dans la base canonique.
3. f est-elle bijective ? Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$.

K28.12 Jean-Damien

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par : pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$,

$$f(P) = (X-1)\left(P(X) - \frac{1}{6}(X-1)^3 P^{(3)}(X)\right)$$

1. Pour $k \in [\![0,3]\!]$, on pose $Q_k = (X-1)^k$. Justifier que $\mathcal{B} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Écrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. En déduire le rang, l'image et le noyau de f.

K28.13 Mathilde L.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par : pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P)$ est le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f(P))(x) = \int_0^x P(t)dt$$

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer l'image, le noyau et le rang de f.

K28.14 Martin, Quentin P.

Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $\phi(P)$ l'unique polynôme tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(P)(x) = P(x) - \int_0^x P(t)dt$$

1. Montrer que ϕ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Ecrire la matrice de ϕ dans les bases canoniques $(1, X, X^2)$ et $(1, X, X^2, X^3)$.
3. Déterminer $\operatorname{Ker}(\phi)$ et $\operatorname{Im}(\phi)$
4. Déterminer

$$\left\{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ \varphi(P)(X) = \frac{-1}{3}X^3 + 3X^2 - 5X + 1\right\}$$

K28.15 Cécile

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P' + (X-1)P'' \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
3. Déterminer le rang, le noyau et l'image de f.

K28.16 Alexandre, Mathilde M.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P + (X-1)P' \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que f est bijectif.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $(1, 2X, 3X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

K28.17 **Manon P., Mathilde B.**

Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\phi(P) = \begin{pmatrix} P(0) & P'(0) \\ P''(0) & P^{(3)}(0) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que ϕ est linéaire.
2. Trouver la matrice de ϕ dans les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.
3. Que dire de ϕ ?

K28.18 **Manon V.**

Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\phi(P) = \int_0^{\pi} P(t)\cos(t)dt$$

1. Montrer que ϕ est linéaire.
2. Donnerr la matrice de ϕ dans les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.
3. Quel est le rang de ϕ ?

K28.19 **Camille, Juliette**

Soit ϕ l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \phi(M) = M - {}^tM$$

1. Montrer que ϕ est linéaire.
2. Trouver la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Quel est le rang de ϕ ?

K28.20 **Caroline, Damien**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application f de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = AM$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. En déduire l'image et le noyau de f.

K28.21 **Capucine, Jean-Damien**

Calculer le rang de la matrice suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

K28.22 **Adèle, Claire**

Déterminer selon la valeur de a le rang de :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 5 \\ -1 & 4 & a \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

K28.23 **Caroline**

Déterminer les réels k tels que la matrice suivante ne soit pas inversible :

$$A = \begin{pmatrix} 2-k & 4 & -6 \\ 3 & -1-k & 5 \\ 0 & 3 & -6-k \end{pmatrix}$$

K28.24 **Quentin P.**

Déterminer les réels k tels que la matrice suivante ne soit pas inversible :

$$A = \begin{pmatrix} 4-k & 2 & 0 \\ 5 & -k & 5 \\ 1 & 1 & 1-k \end{pmatrix}$$

K28.25 **Alexandre**

$$A = \begin{pmatrix} 2-k & 0 & 4 \\ 3 & -4-k & 12 \\ 1 & -2 & 5-k \end{pmatrix}$$

où k est un réel.

Déterminer les valeurs de k pour lesquelles la matrice A est inversible.

K28.26 **Inès, Marion**

$$A = \begin{pmatrix} -1-k & 1 & 1 \\ 3 & -2-k & -4 \\ -2 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

où k est un réel.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. Pour quelle(s) valeur(s) de k, f n'est-il pas bijectif ?

K28.27 **Juliette**

Déterminer en fonction de la valeur de a le rang de :

$$M = \begin{pmatrix} -3-a & 7 \\ -6 & 10-a \end{pmatrix}$$

K28.28 Adèle, Cécile

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. A est-elle inversible ?
2. Déterminer les réel λ tels que $A - \lambda I$ ne soit pas inversible.

K28.29 Constance Be.

Déterminer le rang de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

K28.30 Inès, Marion

On considère l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ qui à tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ associe $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{cases} x' &= -2x + y + 2z \\ y' &= -x + y + z \\ z' &= -2x + y + 2z \end{cases}$$

1. Déterminer le rang de h, une base de $\mathrm{Ker}(h)$ et une base de $\mathrm{Im}(h)$.
2. Déterminer la matrice de h^2. Quel est le rang de h^2 ? Son noyau ? Son image ?

K28.31 Claire, Constance Be.

Soit E un espace vectoriel de dimension 2.
On considère f un endomorphisme de E tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$.

1. Montrer qu'on a obligatoirement $\mathrm{rg}(f) = 1$.
2. Montrer qu'il existe une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de E telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.