Intégration sur un segment

Questions de cours

K23.1 **Noëlle**

Primitive de $x \mapsto x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

K23.2 **Teresa**

Primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

K23.3 **Noëlle**

Primitive de $x \mapsto 1 + \tan^2(x)$

K23.4 **Teresa**

Primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

K23.5 **Benjamin**

Soit f une fonction continue sur I et soit $a \in I$.
Propriétés de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$

K23.6 **Juliane, Mathilde M., Matthieu B., Théophile**

Propriétés de $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$

K23.7 **Anastasia, Emma, Noëlle, Quentin F.**

Intégration par parties

K23.8 **Alice, Justine, Léa, Nicolas, Quentin P., Teresa**

Changement de variables.

K23.9 **Caroline**

Sommes de Riemann

Exercices

K23.10 **Anastasia, Nicolas**

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de :

$$f : x \mapsto 2xe^{e^{x^2}+x^2}$$

K23.11 **Juliane**

Donner les primitives de la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+x-2}$$

sur chacun des intervalles de son ensemble de définition.

K23.12 **Alice, Quentin F.**

Donner les primitives de la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{2}{x+2x\ln(x)}$$

sur chacun des intervalles de son ensemble de définition.

K23.13 **Matthieu B.**

Donner l'ensemble de définition de :

$$g : x \mapsto \tan(x) + \frac{1}{\tan(x)}$$

et donner les primitives de g sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

K23.14 **Théophile**

Calculer

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$$

On pourra chercher une primitive de $f : x \mapsto \frac{x^2}{1+x}$ sous la forme :

$$x \mapsto ax + b + \frac{c}{1+x}$$

K23.15 **Teresa**

$$I_n = \int_{e^n}^{e^{n+2}} \frac{\ln(t)}{t^2}dt$$

Calculer I_n pour tout entier n.
En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

K23.16 **Benjamin, Quentin P.**

Calculer :

$$\int_1^2 \frac{1}{t+\sqrt{t}}dt$$

K23.17 **Tom**

Calculer :

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+4e^x+4e^{2x}}dx$$

K23.18 **Justine, Léa**

Calculer :

$$I = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^3}}dt$$

K23.19 **Emma**

Calculer :

$$I = \int_{1/e}^{1/2} \frac{1}{t\ln^3(t)}dt$$

K23.20 **Benjamin**

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$$

(on formera pour cela une relation de récurrence).

K23.21 **Mathilde M.**

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

1. Calculer I.
2. Retrouver ce résultat en réalisant un changement de variable $x = \tan(u) \Leftrightarrow u = \mathrm{Arctan}(x)$.

K23.22 **Caroline**

Calculer à l'aide d'un changement de variable $u = \sqrt{x+1}$:

$$I = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$$

K23.23 **Justine, Léa**

Soit $T \in \mathbb{R}$. A l'aide d'un changement de variable $u = e^x$, calculer :

$$I = \int_0^T \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$$

K23.24 **Emma**

A l'aide d'un changement de variable $u = \sqrt{t}$, calculer :

$$I = \int_1^2 e^{\sqrt{t}}dt$$

K23.25 **Théophile**

Calculer :

$$I = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

par exemple avec le changement de variable $u = \sin(t)$.

K23.26 **Noëlle**

A l'aide d'un changement de variable échangeant les deux bornes, calculer :

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(x))dx$$

On pourra utiliser que pour tous a, b tels que l'expression ait un sens :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

K23.27 **Matthieu B., Quentin F.**

Calculer :

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{e^{t^2}+1}$$

K23.28 **Benjamin**

Déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2}dt$$

K23.29 **Noëlle, Teresa**

$$F : x \mapsto \int_0^{\sin^2(x)} \mathrm{Arcsin}(\sqrt{t})dt + \int_0^{\cos^2(x)} \mathrm{Arccos}(\sqrt{t})dt$$

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Etudier sa parité et sa périodicité.
3. Calculer sa dérivée et en déduire une expression simplifiée pour F.

K23.30 **Emma**

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$$

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que f est impaire.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$. Donner le sens de variations de f.
4. Montrer que $\forall x \geqslant 0,\ xe^{-4x^2} \leqslant f(x) \leqslant xe^{-x^2}$, et en déduire la limite de f en $+\infty$.

K23.31 **Anastasia, Nicolas**

Etudier la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$$

K23.32 **Tom**

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln^2(t)}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f, et étudier sa dérivabilité et sa dérivée là où elle existe.
2. En minorant simplement f, déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.
3. A l'aide d'une minoration, déterminer les limites de $f(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$.

K23.33 **Mathilde M.**

$$F : x \mapsto \int_0^1 \sqrt{t} \sin(xt) dt$$

1. Déterminer le domaine de définition de F. Calculer $F(0)$.
2. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée pour $x > 0$.
(on pourra pour cela faire un changement de variable $u = xt$.

K23.34 **Alice, Juliane**

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{1+\sin^2(t)}$$

1. Donner un encadrement de I.
2. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ t \geqslant \sin(t)$ et trouver un second encadrement plus précis de I.

K23.35 **Caroline**

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx$$

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée. Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}(1 - e^{-n})$.
Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

K23.36 **Justine, Léa**

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 (\ln(1+x))^n \, dx$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)I_n$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)I_n \leqslant 2(\ln 2)^{n+1} \leqslant (n+2)I_n$.
4. En déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}(\ln 2)^{n+1}$.

K23.37 **Quentin P.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction F_n définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$F_n(x) = \int_x^e (\ln(t))^n dt$$

1. Calculer $F_0(x)$ et $F_1(x)$ pour tout $x > 0$.
2. La fonction F_n est-elle continue sur $]0, +\infty[$? dérivable sur $]0, +\infty[$? si oui, la dériver.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n(x) = e - x\ln^n(x) - nF_{n-1}(x)$.
4. Montrer que F_n peut être prolongée par continuité en 0.