Convergence des suites. Primitives.

Questions de cours

K21.1 **Anastasia, Benjamin, Caroline, Justine, Quentin F.**
Suites adjacentes : définition et théorème

K21.2 **Alice, Constance Bo., Léa, Teresa**

Suites équivalentes et suites négligeables.

K21.3 **Théophile**

Croissances comparées pour les suites.

K21.4 **Sergio**

Méthode pour les suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

K21.5 **Emile, Emma, Juliane, Matthieu B., Quentin P.**
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

K21.6 **Nicolas, Tom** F_0 étant une primitive de la fonction f sur I, déterminer l'ensemble des primitives de f sur I.

K21.7 **Benjamin, Caroline, Quentin F.**

Primitives de $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$

K21.8 **Emile, Juliane**

Primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

K21.9 **Benjamin, Caroline, Quentin F.**

Primitives de $x \mapsto 1 + \tan(x)^2$

K21.10 **Nicolas, Tom**

Primitives de $x \mapsto \sqrt{x}$

K21.11 **Quentin P.**

Primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$

K21.12 **Emile, Juliane, Quentin P.**

Primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

K21.13 **Nicolas, Tom**

Primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

Convergences des suites

K21.14 **Emma**

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $q \in \mathbb{R}$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur u_0 et q pour que la suite (u_n) converge.

K21.15 **Caroline**

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1/3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 3v_n, \quad v_{n+1} = 2u_n + 2v_n \end{cases}$$

Montrer que (u_n) est une suite récurrentes linéaire double. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

K21.16 **Nicolas**

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = a_n + 3b_n, \quad b_{n+1} = b_n - \dfrac{1}{3}a_n \end{cases}$$

1. Montrer que (a_n) est une suite récurrentes linéaire double. Converge-t-elle ?
2. Etudier la convergence de la suite (b_n).

K21.17 **Emile, Juliane**

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{8 + \frac{1}{2}u_n^2} \end{cases}$$

En utilisant la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n^2$, donner l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et trouver la limite de la suite (u_n).

K21.18 **Quentin P.**

Soit (F_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

1. Déterminer l'expression de F_n en fonction de n.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

K21.19 **Teresa, Théophile**

Déterminer la limite des suites :

$$u_n = \frac{n\sin(n)}{n^2+1}, \qquad v_n = \frac{e^{-n\cos^2(n)}}{n+1}$$

K21.20 **Léa**

1. Rappeler quelles inégalités existent entre $\mathrm{Ent}(x)$ et x, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Etudier la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ent}(kx)$$

K21.21 **Théophile**

1. Rappeler la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ avec des quantificateurs.
2. Soit (u_n) une suite de nombres entiers convergeant vers b. Montrer que (u_n) est constante égale à b, à partir d'un certain rang.

K21.22 **Léa**

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $b^2 - 4ac < 0$.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que

$$au_n^2 + bu_nv_n + cv_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Montrer que nécessairement, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

K21.23 **Caroline**

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite est bien définie.
2. Quelles sont les limites possibles pour (u_n) ?
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ |f(x) - \varphi| \leqslant \frac{1}{2}|x - \varphi|$$
où $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
4. En déduire la convergence de (u_n).

K21.24 **Constance Bo.**

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$$

1. Que dire de la suite si $u_0 = 0$?
2. Supposons $u_0 > 0$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. Etudier la monotonie de la suite, et étudier la convergence de (u_n).
3. Etudier de même le cas où $u_0 < 0$.

K21.25 **Quentin P.**

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{-u_n} \end{cases}$.

1. Montrer que la suite est bien définie.
2. On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{-x}$. Montrer que f admet un unique point fixe $\alpha \in]0, 1[$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Etudier la monotonie des suites (v_n) et (w_n) et en déduire leurs convergences.
4. Déterminer les limites de (v_n) et (w_n) et conclure pour la nature de la suite (u_n).

K21.26 **Mathilde M.**

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite. Quelle est la nature de la suite $(u_n$?

K21.27 **Teresa**

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\ln(n!)}{n}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{2n} \geqslant \dfrac{\ln(n)}{2}$
2. Montrer que $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{2n}$
3. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

K21.28 **Emile, Juliane**

1. Vérifier que pour tout réel $x > -1$, on a :
$$\ln(1+x) - x \leqslant 0$$
2. On note (u_n) et (v_n) les suites définies par :
$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n), \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}$$
Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent.

K21.29 **Nicolas, Tom**

Etudier selon les valeurs de u_0 la convergence de la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2 + u_n^2) \end{cases}$$

K21.30 **Alice, Justine**

On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n^2 - 4) \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de u_0 la suite (u_n) est-elle constante ?
2. Etudier la convergence de (u_n) quand $u_0 > 4$, puis quand $u_0 \in [-3/2, -1/2]$.
3. Existe-t-il des valeurs $u_0 \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la suite (u_n) ne prend que deux valeurs distinctes ?

K21.31 **Matthieu B.**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [-1, 1], \\ \forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n^2 - 1 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in [-1, 0]$.
2. On pose pour tout entier n, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que (v_n) et (w_n) convergent.
3. Montrer que (u_n) diverge, sauf pour deux valeurs particulières de u_0 que l'on précisera.

K21.32 **Benjamin, Quentin F.**

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - u_n^2 \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
2. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent.
3. Montrer que (u_n) diverge.

K21.33 **Anastasia, Emma**

On considère la suite (u_n) définie par récurrence comme suit. On part de $u_1 \in]0, 1]$ et pour $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = f_n(u_n), \quad \text{où } f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$$

1. Montrer que (u_n) est une suite convergente, on note ℓ sa limite.
Prouver que $\ell = 0$, par exemple en effectuant un raisonnement par l'absurde.
2. En étudiant les variations des fonctions f_n pour $n \geqslant 1$, montrer que $\forall n \geqslant 2$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
3. En déduire que $(nu_n)_{n\geqslant 2}$ est une suite croissante. Montrer qu'elle admet une limite $\ell' \in]0, 1]$.
4. Prouver que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n > 0$ et
$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = nu_n$$
En tirer la valeur de ℓ'.

K21.34 **Mathilde M.**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall x \geqslant 0,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et donner la valeur de $f'(0)$?
   On admettra que
   $$e^x - 1 - xe^x \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$
2. En calculant $f''(x)$ pour tout $x > 0$, montrer que f' est croissante. En déduire que
   $$\forall x > 0,\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$
3. Montrer que f admet un unique point fixe $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, que l'on déterminera. Montrer alors que pour tout $x \geqslant 0$,
   $$|f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$$
4. Etudier la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par
   $$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{e^{u_n} - 1} \end{cases}$$

K21.35 **Benjamin, Quentin F.**

Donner un équivalent simple de la suite suivante, puis donner sa limite si elle existe :

$$u_n = 2^n - 3^{n+1} + n^{10}$$

K21.36 **Sergio**

On appelle nombre algébrique un nombre qui est racine d'un polynôme à coefficients rationnels. Un nombre qui n'est pas algébrique est dit transcendant.

Un nombre irrationnel est dit de Liouville si

$$\forall n \geqslant 2,\ \exists \frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q} \ / \ \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{(q_n)^n}$$

Un nombre qui n'est pas de Liouville est dit diophantien.

1. Montrer que tout nombre algébrique est diophantien.
2. Montrer que $\lambda = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^k}$ est de Liouville.
3. Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas en bijection avec $\mathbb{N}$ et retrouver l'existence de nombre transcendants.

Primitives

K21.37 **Emma, Matthieu B.**

Montrer que l'ensemble des primitives de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}^{+*}$ est :

$$E = \{x \mapsto x\ln(x) - x + k, k \in \mathbb{R}\}$$

K21.38 **Constance Bo.**

Soit $a > 0$. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction $x \mapsto a^x$ sur $\mathbb{R}$ en fonction de la valeur de a.