Convergence des suites.

Questions de cours

K20.1 **Adèle, Mathilde B.**

Suites récurrentes linéaires doubles.

K20.2 **Constance Be., Inès, Manon P., Manon V.**

Traduire en quantificateurs que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

K20.3 **Adèle, Inès, Manon P., Mathilde B.**

Traduire en quantificateurs que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

K20.4 **Inès, Juliette, Manon P., Noëlle**

Traduire en quantificateurs que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

K20.5 **Capucine, Constance Be., Marion, Matthieu P., Manon V.**

Soit (u_n) une suite bornée et soit (v_n) une suite convergeant vers 0.
Montrer que la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.

K20.6 **Alexandre, Camille, Jean-Damien, Juliette, Noëlle**

Suites adjacentes : définition et théorème

Exercices

K20.7 **Capucine, Manon P.**

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ 6u_{n+2} - 7u_{n+1} - 3u_n = 0 \end{cases}$$

Donner pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de u_n en fonction de n et en déduire la nature de la suite (u_n).

K20.8 **Marion**

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1/3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 3v_n, \quad v_{n+1} = 2u_n + 2v_n \end{cases}$$

Montrer que (u_n) est une suite récurrentes linéaire double. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

K20.9 **Jean-Damien**

Soit (F_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

1. Déterminer l'expression de F_n en fonction de n.
2. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

K20.10 **Noëlle**

1. Montrer que pour tout réel x de $]0, +\infty[$, on a :
$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$
2. En déduire, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la limite suivante :
$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$$

K20.11 **Camille**

1. Montrer que
$$\forall k \geqslant 1,\ \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$
2. En déduire la limite suivante :
$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

$\boxed{\text{K20.12}}$ Manon P.

1. Montrer que
$$\forall n \geqslant 1,\ \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$
2. Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)^{n+1}} \end{cases}$$
Montrer que la suite (u_n) converge.

$\boxed{\text{K20.13}}$ Constance Be., Manon V.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par :
$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{n+1}{\left((-1)^n + e^{1/n}\right) n}$$
Etudier la convergence de la suite (u_n). On pourra pour cela étudier les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

$\boxed{\text{K20.14}}$ Noëlle

On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :
$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$
Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

$\boxed{\text{K20.15}}$ Alexandre, Camille

Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$
Etudier la monotonie de la suite (u_n) et en déduire la nature de la suite (u_n).

$\boxed{\text{K20.16}}$ Juliette, Noëlle

Soit (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 > 0, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$$

$\boxed{\text{K20.17}}$ Capucine, Matthieu P.

Soit (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$$

1. Que dire de la suite si $u_0 = 0$?
2. Supposons $u_0 > 0$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. Etudier la monotonie de la suite, et étudier la convergence de (u_n).
3. Etudier de même le cas où $u_0 < 0$.

$\boxed{\text{K20.18}}$ Jean-Damien

Soit (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{-u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite est bien définie.
2. On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{-x}$. Montrer que f admet un unique point fixe $\alpha \in]0,1[$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Etudier la monotonie des suites (v_n) et (w_n) et en déduire leurs convergences.
4. Déterminer les limites de (v_n) et (w_n) et conclure pour la nature de la suite (u_n).

$\boxed{\text{K20.19}}$ Marion

Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite est bien définie.
2. Quelles sont les limites possibles pour (u_n) ?
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ |f(x) - \varphi| \leqslant \frac{1}{2}|x - \varphi|$$
où $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
4. En déduire la convergence de (u_n).

K20.20 **Adèle, Mathilde B.**

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \frac{1-x}{3}e^x$$

On admet que la fonction f est strictement décroissante sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\left[0, \frac{1}{3}\right]$. On admet également que l'équation $f(x) = x$ admet une solution et une seule α sur $[0, 1]$ et que celle-ci appartient à $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

On considère la suite (u_n) déterminée par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.
2. Montrer que :
$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{3}\right],\ -0.16 \leqslant f'(x) \leqslant 0$$
(Indication : $-\frac{1}{9}e^{1/3} \simeq -0.155$)
3. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0.16|u_n - \alpha|$$
puis que pour tout entier n, on a :
$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{3}(0.16)^n$$
4. En déduire la limite de la suite (u_n).

K20.21 **Constance Be., Manon V.**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ arppartenant à $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.
2. Montrer que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ et que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$
3. On définit la suite (x_n) en posant $x_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = f(x_n)$.
Vérifier que la suite (x_n) est parfaitement définie et montrer que cette suite est croissante.
4. Montrer que pour tout n, $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{2}$
5. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

K20.22 **Damien**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. Soit $(S_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :

$$\forall n \geqslant 0,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

1. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell < 1$.
Montrer que (S_n) converge.
2. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell > 1$.
Montrer que (S_n) diverge.

K20.23 **Martin**

On rappelle que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

Montrer que la suite $(\cos(n))_{n\geqslant 0}$ diverge.

K20.24 **Mathilde L.**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}$.

1. Montrer que (S_n) converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ S'_{n+1} = \frac{S'_n + S_n}{3}$.
3. Montrer que (S'_n) converge et trouver sa limite.

K20.25 **Marie**

Etudier la convergence de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n(u_n - \alpha) \end{cases}$$

selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

K20.26 **Marion**

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite. Quelle est la nature de la suite $(u_n$?

K20.27 **Inès**

Soient $0 < q \leqslant p$. Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} 0 \leqslant u_0 < v_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{pu_n + qv_n}{p+q}, \quad v_{n+1} = \dfrac{pv_n + qu_n}{p+q} \end{cases}$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + v_{n+1}$ et en déduire leur limite commune.

K20.28 **Jean-Damien**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $0 < v_0 < u_0$, et pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent, vers une même limite.