Espaces vectoriels.

Questions de cours

K16.1 **Alexandre, Claire, Martin**

Définition d'une famille génératrice d'un espace vectoriel E

K16.2 **Alexandre, Claire, Marion**

Famille génératrice où un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

K16.3 **Capucine, Cécile**

Définition d'une famille liée

K16.4 **Damien, Inès, Jean-Damien, Marie**

Définition d'une famille libre

K16.5 **Capucine, Cécile, Matthieu P.**

Une famille est liée si et seulement si un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

K16.6 **Camille, Inès, Marie**

Une sous-famille d'une famille libre est encore libre.

K16.7 **Manon P.**

Unicité de l'écriture en combinaison linéaire d'une famille libre.

K16.8 **Manon V.**

Définition d'une base d'un espace vectoriel E

K16.9 **Adèle, Marion, Martin, Mathilde B.**

Dimension d'un espace vectoriel.

K16.10 **Constance Be., Juliette**

Bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

K16.11 **Jean-Damien, Mathilde L.**

Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Espaces vectoriels

K16.12 **Inès, Marie**

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x-y-3z = 0 \text{ et } 3x-2y-4z = 0\}$$

Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera une base.

K16.13 **Manon P.**

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+2y+z = 0\}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.

K16.14 **Matthieu P.**

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 3x+y-z = 0 \text{ et } 2x+y+z = 0\}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.

K16.15 **Camille**

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x-y+z = 0 \text{ et } 2x-y-z = 0\}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.

K16.16 **Alexandre, Claire**

On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille de vecteurs $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$, où

$$\overrightarrow{e_1} = (4,-5,3),\ \overrightarrow{e_2} = (2,3,-2)$$
$$\overrightarrow{e_3} = (4,-16,10),\ \overrightarrow{e_4} = (8,1,-1)$$

Déterminer une base de cet espace vectoriel.

K16.17 **Inès, Marie**

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{e_1} = (3,0,4,1),\ \overrightarrow{e_2} = (0,1,2,1)$$
$$\overrightarrow{e_3} = (-5,0,-2,3),\ \overrightarrow{e_4} = (2,1,2,-1)$$

1. Déterminer une base de F. Quelle est la dimension de F ?
2. Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.

K16.18 **Damien, Jean-Damien**

$$F = Vect\Big((1,1,1),(2,0,1)\Big), G = Vect\Big((1,0,1),(1,-1,0)\Big)$$

Déterminer $F \cap G$.

K16.19 **Capucine, Cécile**

Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel B de $\mathbb{R}^3$ défini par $B = Vect(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, où

$$\overrightarrow{e_1} = (3,1,-2),\ \overrightarrow{e_2} = (5,-1,-4),\ \overrightarrow{e_3} = (-1,5,2)$$

K16.20 **Claire**

On considère les deux ensembles :

$$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+z-t=0\}$$

$$H = \{(a, a+b+c, a+b, b-c),\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et et donner une base.
2. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et et donner une base.
3. Déterminer la dimension de $G \cap H$.

K16.21 **Cécile**

On considère les deux ensembles :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+2y+3z=0 \text{ et } 2x-y+z=0\}$$

$$H = \{(a+b, a+b, a-2b),\ a,b \in \mathbb{R}\}$$

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Donner une base $(\overrightarrow{f})$ de F et une base $(\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2})$ de G.
2. Donner une équation cartésienne de G. Vérifier que $F \subset G$.
   Le triplet $(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2})$ forme-t-il une famille libre ?

K16.22 **Matthieu P.**

Montrer qu'une famille de polynômes échelonnés en degré est libre.

K16.23 **Marion, Mathilde L.**

La famille $(X^2, X(X-1), (X-1)^2)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

K16.24 **Marion, Martin**

On considère les deux ensembles :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y-t=0 \text{ et } y-z=0\}$$

$$G = Vect\Big((0,1,0,0),(1,0,1,0)\Big)$$

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et donner pour chacun une base et sa dimension.
2. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

K16.25 **Mathilde L.**

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x-z=0\},\ G = Vect\big((1,1,-1)\big)$$

Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

K16.26 **Manon P.**

Soient E, F, G, H les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ a-2b+c=0\}$$
$$G = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ a+b+c=0 \text{ et } a-b+c=0\}$$
$$H = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2a-b+3c=0\}$$
$$E = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ a+b+c=0 \text{ et } 2a+3b+c=0\}$$

F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$? F et H ? F et E ?

K16.27 **Matthieu P.**

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ / \ b-2c+d=0\}$$
$$G = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ / \ a=d \text{ et } b=2c\}$$

1. Donner une base de F, de G, de $F \cap G$
2. Montrer que $F + G = \mathbb{R}^4$
3. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

K16.28 **Camille**

Soient F et G les sev de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2a-3b=0\}$$
$$G = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ a=b \text{ et } a-2b-c=0\}$$

1. Déterminer des bases de F et G.
2. Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.
3. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

K16.29 **Manon P.**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E tels que $F+G=E$.
Soit F' un supplémentaire de $F\cap G$ dans F. Montrer que $F'\oplus G=E$.

K16.30 **Manon V.**

Soit F l'ensemble de toutes les matrices $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que la somme des coefficients diagonaux de M fait 0.

1. Combien faut-il de coefficients pour décrire une matrice de F ?
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et en donner une famille génératrice, puis une base.

K16.31 **Adèle**

Soit $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe $(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\neq(0,0,0,0,0)$ tel que :
$$\lambda_0 I_2+\lambda_1 M+\lambda_2 M^2+\lambda_3 M^3+\lambda_4 M^4=0$$
2. Déterminer $(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ quand $M=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$.

K16.32 **Mathilde B.**

Déterminer le plus grand entier p tel que la famille $(I,A,A^2,\dots,A^p)$ est libre dans les cas suivants :

1. $A=\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2. $A=\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\\vdots&&\vdots\\1&\cdots&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
3. $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

K16.33 **Camille**

Soient a et b deux réels fixés. Soit F l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 4 dont a et b sont racines.

1. Vérifier que F est un espace vectoriel.
2. Montrer que les polynômes $X^2(X-a)(X-b)$, $X(X-a)(X-b)$ et $(X-a)(X-b)$ sont générateurs de F.
3. Quelle est la dimension de F ?

K16.34 **Juliette**

Soit $a\in\mathbb{R}$.

1. Montrer que la famille $(1,(X-a),(X-a)^2,\dots,(X-a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que si $P\in\mathbb{R}_n[X]$, il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que $P(X)=\lambda_1+\lambda_2(X-a)+\cdots+\lambda_n(X-a)^n$ et expliciter les coefficients λ_i en fonction de P.
3. Mêmes questions en prenant la famille $(1,X,X(X-1),X(X-1)(X-2),\dots,X(X-1)\cdots(X-n+1))$.

K16.35 **Jean-Damien, Martin**

On pose $f_0:x\mapsto 1$, $f_1:x\mapsto e^x$, $f_2:x\mapsto e^{2x}$, $\dots$, $f_n:x\mapsto e^{nx}$ (pour $n\in\mathbb{N}$).
Montrer que la famille $(f_0,f_1,\dots,f_n)$ est libre dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

K16.36 **Constance Be.**

1. Soient $a_1,\dots,a_{n+1}$, $n+1$ réels distincts.
Trouver une famille de polynômes $(L_1(X),\dots,L_{n+1}(X))$ vérifiant la condition suivante :
$$\forall i\in[\![1,n+1]\!],\ L_i(a_i)=1 \text{ et } L_i(a_j)=0 \text{ quand } j\neq i$$
2. Montrer que la famille $(L_1,\dots,L_{n+1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.
3. Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}$ tels que
$$P(X)=\lambda_1 L_1(X)+\cdots+\lambda_{n+1}L_{n+1}(X)$$
Expliciter les coefficients λ_i en fonction de P.