Matrices. Espaces vectoriels.

Questions de cours

K15.1 **Anastasia, Noëlle**

Donner des exemples d'espaces vectoriels

K15.2 **Alice, Léa, Théophile**

Définition d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E

K15.3 **Constance Bo., Emile, Léa, Quentin F., Quentin P., Théophile**

Définition d'une famille génératrice d'un espace vectoriel E

K15.4 **Emile, Quentin F.**

Famille génératrice où un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

K15.5 **Benjamin, Caroline, Constance Bo., Juliane, Justine, Léa, Matthieu B., Nicolas, Teresa, Théophile, Tom**

Définition d'une famille libre, d'une famille liée

K15.6 **Nicolas, Tom**

Famille libre d'un seul vecteur.

K15.7 **Benjamin, Emma, Juliane, Mathilde M.**

Famille libre de deux vecteurs

K15.8 **Léa, Sergio, Théophile**

Définition d'une base d'un espace vectoriel E

Matrices

K15.9 **Justine**

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer si A est inversible et si oui, déterminer son inverse.

K15.10 **Mathilde M.**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer si A est inversible et si oui, déterminer son inverse.

K15.11 **Benjamin**

Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & -6 \\ -2 & -3 & 1 \\ 6 & 7 & -5 \end{pmatrix}$.

Calculer A^3.

En déduire que la matrice $I_3 - A$ est inversible et donner son inverse.

K15.12 **Emma**

Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$.

Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.

Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire le calcul de A^n pour tout $n \geqslant 1$.

K15.13 **Nicolas, Tom**

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1/2 \\ -2 & 2 & 1/2 \\ -2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.

Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire le calcul de A^n pour tout $n \geqslant 1$.

K15.14 **Quentin P.**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Plus généralement que peut-on dire d'une matrice de taille n triangulaire supérieure n'ayant que des 1 dans sa moitié supérieure ?

K15.15 **Quentin F.**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & m \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$.
Déterminer les valeurs de m pour que A soit inversible.
Dans le cas où $m = 0$, calculer A^{-1}.

K15.16 **Sergio**

On appelle graphe un ensemble de points du plan où deux points distincts peuvent être reliés par une arête (ils sont alors voisins). Un chemin de longueur p est une suite de p sommets voisins.
La distance entre deux sommets x et y est la longueur minimale d'un chemin de x à y.
Le diamètre du graphe est la distance maximale entre deux sommets distincts.
Le degré maximum du graphe est le nombre maximal de voisins d'un sommet.
On considère un graphe G à n sommets numérotés de 1 à n, de diamètre 2 et de degré maximal d.

1. Montrer que $n \leqslant d^2 + 1$
2. Montrer que si $n = d^2 + 1$, alors tout sommet a d voisins.
3. On se place dans ce cas. On note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $a_{i,j} = 1$ si i et j sont reliés, $a_{i,j} = 0$ sinon.
   (a) Montrer que $A^2 + A - (d-1)I_n = K$ où K est la matrice ne contenant que des 1.
   (b) Etudier les valeurs propres et les sous-espaces propres de A, et en déduire que d ne peut prendre que les valeurs 2, 3, 7 et 57.

Espaces vectoriels

K15.17 **Théophile**

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y - z = 0\}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.

K15.18 **Benjamin, Juliane**

$$E = \{(a + b, a + b, a - 2b), a, b \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice. La famille obtenue est-elle une famille libre dans $\mathbb{R}^3$?

K15.19 **Emile, Quentin F.**

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \left| \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{array} \right. \right\}$$

E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Si oui, en donner une famille génératrice finie.
Même question avec

$$F = \{(x, 1, z), \ x, z \in \mathbb{R}\}$$

K15.20 **Léa**

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \left| \begin{array}{l} 3x + y - z = 0, \\ x - y + z = 0 \end{array} \right. \right\}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.

K15.21 **Emma, Mathilde M.**

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \left| \begin{array}{l} 2x - y + z = 0, \\ x + 2z = 0 \end{array} \right. \right\}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.

K15.22 **Caroline, Justine**

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \left| \begin{array}{l} 2x + y - t = 0, \\ x - y + t = 0, \\ x + 2y - 2z = 0 \end{array} \right. \right\}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.

K15.23 **Constance Bo, Quentin P.**

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + 3y + 4z = 0\}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.

K15.24 **Nicolas, Tom**

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x - y + z = 0\}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une famille génératrice. La famille trouvée est-elle libre dans $\mathbb{R}^4$?

K15.25 **Nicolas, Tom**

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a+b \\ b & c & a \\ c & a & a+c \end{pmatrix},\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

K15.26 **Noëlle**

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Trouver un maximum d'exemples de sous-espaces vectoriels de E.

K15.27 **Benjamin, Juliane**

Dans l'espace vectoriel U des suites réelles, les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vect. de U.

1. L'ensemble U_1 des suites monotones.
2. L'ensemble U_2 des suites convergentes.

K15.28 **Anastasia**

1. Soit $\mathcal{S}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = M\}$ et soit $\mathcal{A}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = -M\}$
   Montrer que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Combien faut-il trouver de coefficients pour décrire une matrice de $\mathcal{S}_n$? de $\mathcal{A}_n$?
3. Trouver une famille génératrice de $\mathcal{S}_n$ et une famille génératrice de $\mathcal{A}_n$.

K15.29 **Théophile**

Soient les vecteurs : $\overrightarrow{u_1} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{u_2} = (4,1,4)$ et $\overrightarrow{u_3} = (2,-1,4)$.

1. Montrer que les familles $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$, $(\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3})$ et $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_3})$ sont toutes les trois libres.
2. La famille $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3})$ est-elle libre ?

K15.30 **Léa**

Soient a et b deux réels fixés. Soit F l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 4, dont a et b sont racines.

1. Vérifier que F est un espace vectoriel.
2. Montrer que les polynômes $X^2(X-a)(X-b)$, $X(X-a)(X-b)$ et $(X-a)(X-b)$ sont générateurs de F.
3. Cette famille est-elle libre ?

K15.31 **Caroline, Constance Bo, Justine, Quentin P.**

Soient $P_1 = X^3 + X^2$, $P_2 = X^2 + X$, $P_3 = X + 1$, $P_4 = X^3 + X$. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$?

K15.32 **Emma, Mathilde M.**

La famille $(1 + X + X^2, 1 - X + iX^2, 1 + X - X^2)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{C}_2[X]$?

K15.33 **Mathilde M.**

Montrer que la famille $(X^2 + X, X + 1, 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

K15.34 **Emile, Quentin F.**

Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère $P_0(X) = (X-1)(X+1)$, $P_1(X) = (X+1)(X-2)$, $P_2(X) = (X-1)(X-2)$. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une famille libre.

K15.35 **Teresa**

Soient a_1, a_2, a_3 trois réels distincts.

1. Trouver $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $P_i(a_i) = 1$ et $P_i(a_j) = 0$ pour $j \neq i$.
2. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est libre.

K15.36 **Matthieu B.**

1. Que dire d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que M et ${}^tM$ sont liées ?
2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le plus grand entier p tel que $(M, M^2, \dots, M^p)$ est libre.

K15.37 **Justine, Quentin P.**

On pose $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto e^x$, $f_2 : x \mapsto e^{2x}$, $\dots$, $f_n : x \mapsto e^{nx}$, $n+1$ fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

K15.38 **Alice**

1. L'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-il un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
2. Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotentes qui commutent, alors $A + B$ est encore nilpotente.