Matrices

Questions de cours

K14.1 Camille, Marie, Mathilde L.

Donner la définition du produit de deux matrices A et B.

K14.2 Cécile, Marion, Martin, Matthieu

Définition de la transposée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Donner la transposée d'une somme de matrices, d'un produit de matrices.

K14.3 Claire, Manon P.

Formule du binôme de Newton pour les matrices.

K14.4 Damien, Jean-Damien

Définition d'une matrice carrée inversible et alors de son inverse.
Si A et B sont deux matrices inversibles, donner l'inverse de la matrice AB.

Exercices

K14.5 Mathilde L.

Lorsque c'est possible, calculer les produits AB, BC et AC pour les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

K14.6 Alexandre, Juliette

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

et on pose $M = A - I_3$.

1. Calculer M^2, en déduire que A est inversible et préciser A^{-1}.
2. Donner l'expression de A^n pour tout entier n.

K14.7 Damien, Jean-Damien

Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ et $C = B - A$.

1. Calculer AB. On admettra que $AB = BA$.
2. Calculer B^2, puis B^n pour $n \geqslant 1$.
3. Calculer A^2, puis A^n pour $n \geqslant 1$.
4. Calculer C^n pour $n \geqslant 1$.

K14.8 Mathilde B.

Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

K14.9 Manon P.

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Calculer les puissances de $M_a = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(a) & \operatorname{sh}(a) \\ \operatorname{sh}(a) & \operatorname{ch}(a) \end{pmatrix}$.
2. Etudier l'inversibilité de M_a.

K14.10 Inès, Jean-Damien, Manon V.

Soit a un réel non nul. On note :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 - A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels α_n, β_n tels que

$$A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$$

K14.11 **Juliette**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une suite (a_n) de réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}$$

Calculer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire A^n.

K14.12 **Adèle**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

K14.13 **Cécile**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tous réels a et b,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

2. Montrer que R_θ est inversible et calculer $(R_\theta)^{-1}$
3. Calculer R_θ^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

K14.14 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 - 3A + 2I_2 = 0$. La matrice A est-elle inversible ?
2. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$ le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

K14.15 **Constance Bo.**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 - A - 2I = 0$. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X+1)(X-2)$. En déduire l'expression de A^n.

K14.16 **Constance Be.**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 + A = I_n$. Montrer que $A^2 + A + I_n$ est inversible et calculer son inverse.

K14.17 **Mathilde B.**

Calculer les puissances de la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

K14.18 **Constance Be.**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^3. Montrer que A est inversible et calculer son inverse de deux façons différentes.

K14.19 **Marion, Martin**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3. La matrice A est-elle inversible ?
2. Déterminer A^n pour tout $n \geqslant 1$.

K14.20 **Constance Bo.**

Une matrice carrée M est dite nilpotente s'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $M^p = 0$.

1. Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes. En déduire que la somme de deux matrices nilpotentes n'est pas toujours nilpotente.
2. On suppose désormais que A et B sont deux matrices nilpotentes qui commutent entre elles. Montrer alors que $A+B$ et AB sont nilpotentes.

K14.21 Claire

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice M est-elle inversible ? Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer les puissances de la matrice A.

K14.22 Inès, Mathilde B.

Soient trois suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n - 2v_n + 2w_n \\ v_{n+1} = w_n - u_n \\ w_{n+1} = u_n + 2w_n - v_n \end{cases}$$

1. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice A telle que $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.
2. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer PQ. Qu'en déduire ?
3. Calculer QAP et en déduire le calcul de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

K14.23 Constance Be.

Soient trois suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ vérifiant : $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et $c_0 = 7$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$

Déterminer a_n, b_n, c_n uniquement en fonction de n.

K14.24 Juliette

Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer M^{-1}.

K14.25 Damien, Jean-Damien

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Calculer ${}^tA$ et donner sans calcul l'inverse de ${}^tA$.

K14.26 Adèle

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer $M^2 - 4M$. Montrer que M est inversible et calculer son inverse de deux manières différentes.

K14.27 Capucine, Manon V.

Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer M^{-1}.

K14.28 Mathilde B.

Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer M^{-1}.

K14.29 Alexandre

Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer M^{-1}.

K14.30 Marion, Martin

Déterminer les valeurs de m pour lesquels la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & m \end{pmatrix}$ est inversible.

Dans le cas où $m = 0$, calculer A^{-1}.

$\boxed{\text{K14.31}}$ **Inès**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de λ pour lesquels la matrice $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ est inversible.

$\boxed{\text{K14.32}}$ **Marie**

1. Trouver $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant :

$$P + P' + P'' + P''' = X^3 + 1$$

2. Calculer l'inverse de la matrice du système étudié au 1) (après avoir montré qu'elle est inversible).

$\boxed{\text{K14.33}}$ **Mathilde L.**

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1/2 \\ -2 & 2 & 1/2 \\ -2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$. Que constate-t-on ?
3. Exprimer A en fonction de P, P^{-1} et D.
4. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ A^n = PD^nP^{-1}$. Calculer alors A^n.

$\boxed{\text{K14.34}}$ **Adèle**

Déterminer les réels a, b, c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points $A(1,5)$, $B(-1,1)$, $C(2,2)$.

$\boxed{\text{K14.35}}$ **Camille, Claire**

1. Trouver $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq I_n$ vérifiant $M^{-1} = M$.
2. Que dire d'une matrice $M \in \mathcal{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tM = -M$ et M triangulaire.
3. Trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $M^2 = M$.

$\boxed{\text{K14.36}}$ **Manon V.**

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit sa "trace", notée $\mathrm{Tr}(A)$, étant la somme de ses coefficients diagonaux.

1. Ecrire $\mathrm{Tr}(A)$ en fonction des coefficients $a_{i,j}$ de A
2. Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{Tr}(A)$
3. Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.