Fonctions trigo. Systèmes linéaires. Matrices

Questions de cours

K13.1 **Anastasia, Constance Bo., Mathilde M., Noëlle**
Fonction Arcsin : définition, dérivée, graphe.

K13.2 **Caroline, Justine, Quentin F., Teresa**
Fonction Arccos : définition, dérivée, graphe.

K13.3 **Alice, Benjamin, Emma, Juliane, Quentin P., Sergio, Tom**
Fonction Arctan : définition, dérivée, graphe.

K13.4 **Léa, Matthieu B., Nathalie, Nicolas**
Produit de deux matrices : conditions et définition.

K13.5 **Emile, Théophile**
Binôme de Newton pour les matrices.

Dérivation et fonctions trigo.

K13.6 **Théophile**
Etudier la fonction f définie par

$$f(x) = \sin(\mathrm{Arctan}(x))$$

K13.7 **Matthieu B., Nicolas**
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

1. Déterminer le domaine de définition de f et ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
2. Déterminer la dérivée de f là où f est dérivable.

K13.8 **Sergio** Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ supposée deux-fois dérivable sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c)$$

Systèmes linéaires

K13.9 **Constance Bo., Mathilde M.**
Résoudre le système linéaire d'inconnues réelles suivant :

$$\begin{cases} 5x - 10y - z - 7t = 7 \\ x - 2y + z - t = 1 \\ 2x - 4y - z - 3t = 3 \\ x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

K13.10 **Caroline, Justine**
Résoudre le système linéaire d'inconnues réelles suivant :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$$

K13.11 **Juliane**
Résoudre le système linéaire d'inconnues réelles suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + z - t = 1 \\ x + y + z - 2t = 0 \\ x - z + t = 2 \end{cases}$$

K13.12 **Emma, Quentin P**
Discuter en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$$

K13.13 **Quentin F.**
Discuter en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$ l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = a \end{cases}$$

K13.14 **Anastasia, Nicolas**

Soit un paramètre $m \in \mathbb{R}$. Déterminer en fonction de m l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ mx+y+z &= m \\ x+my+z &= 1 \\ x+y+mz &= m \end{cases}$$

K13.15 **Léa**

Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}_4[X]$ vérifiant toutes les conditions suivantes :

(i) le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^3$ est X^2+X+1

(ii) -1 est racine de P

(iii) P admet un extremum local en 0

K13.16 **Emile**

Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant toutes les conditions suivantes :

(i) 1 et -1 sont racines de P

(ii) La tangente à $\mathcal{C}_P$ en $x=2$ est parallèle à la droite d'équation $y=3x$

(iii) P admet un extremum local en $x=-2$

K13.17 **Noëlle**

Montrer qu'il existe des uniques réels a, b, c et les déterminer, tels que pour tout réel $x \notin \{0,-1,-2\}$,

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

K13.18 **Teresa**

Déterminer les réels a, b, c tels que la parabole d'équation $y = ax^2+bx+c$ passe par les points $A(1,5)$, $B(-1,-1)$, $C(2,2)$.

Matrices

K13.19 **Emma, Quentin P.**

Lorsque c'est possible, calculer les produits AB, BC et AC pour les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

K13.20 **Constance Bo., Mathilde M.**

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB
2. Montrer que A et B ne sont pas inversibles.

K13.21 **Caroline, Justine**

Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ et $C = B - A$.

1. Calculer AB. On admettra que $AB = BA$.
2. Calculer B^2, puis B^n pour $n \geqslant 1$.
3. Calculer A^2, puis A^n pour $n \geqslant 1$.
4. Calculer C^n pour $n \geqslant 1$.

K13.22 **Tom**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible.
2. Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = 0$.

K13.23 **Nathalie**

Calculer les puissances de la matrice :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

K13.24 **Quentin**

1. Montrer que pour tous réels a, b, on a :
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
2. On note pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
Calculer $R(\theta)R(\theta')$ pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. En déduire que les matrices $R(\theta)$ sont toutes inversibles et déterminer leur inverse.

K13.25 **Caroline, Justine**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1/2 & 0 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 - A - 2I_3 = 0$
2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

K13.26 **Anastasia, Nicolas**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A - I_3$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

K13.27 **Juliane, Matthieu B.**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A - 2I_3$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

K13.28 **Teresa**

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 4A$.
2. Montrer que A est inversible et calculer son inverse de deux manières différentes.

K13.29 **Alice**

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n, b_n tels que $A^n = a_n I + b_n A$.
Exprimer a_n et b_n en fonction de n et en déduire l'expression de A^n en fonction de n.

K13.30 **Juliane**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n peut s'écrire sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où (a_n) et (b_n) sont deux suites vérifiant des relations de récurrence.
En déduire l'expression de A^n pour tout $n \geqslant 1$.

K13.31 **Quentin F.**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n, b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I$.

K13.32 **Emma, Quentin P.**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3, puis A^n pour $n \geqslant 1$.
2. La matrice A est-elle inversible ?

K13.33 **Constance Bo., Mathilde M.**

Soit $M = \begin{pmatrix} 8 & 10 & -6 \\ -2 & -3 & 1 \\ 6 & 7 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^3
2. Factoriser $I_3 - M^3$.
En déduire que la matrice $(I_3 - M)$ est inversible et donner son inverse.

K13.34 **Noëlle**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^3.
2. Montrer que A est inversible et calculer son inverse de deux façons différentes.

K13.35 **Benjamin**

Calculer les puissances de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

K13.36 **Sergio**

Soient (a_n), (b_n), (c_n) trois suites réelles telles que : $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $c_0 = 7$ et vérifiant les relations valables pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$

Déterminer a_n, b_n, c_n uniquement en fonction de n.

K13.37 **Sergio**

Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres.

K13.38 **Sergio**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 + A = I_n$. Montrer que $A^2 + A + I_n$ est inversible et calculer son inverse.

K13.39 **Sergio**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X+1)(X-2)$. En déduire une expression de A^n.