# Dérivabilité et fonctions trigo. Systèmes linéaires.

## Questions de cours

**K12.1** **Damien.**

Produit de fonctions dérivables.

**K12.2** **Adèle, Manon P., Martin, Mathilde B.**

Quotient de fonctions dérivables.

**K12.3** **Cécile, Claire, Marie**

Formule de la dérivée d'une fonction réciproque.

**K12.4** **Cécile, Manon P., Juliette, Manon V.**

Fonction Arcsin : définition, dérivée, graphe.

**K12.5** **Marie, Marion**

Fonction Arccos : définition, dérivée, graphe.

**K12.6** **Claire, Constance Be., Jean-Damien, Matthieu P.**

Fonction Arctan : définition, dérivée, graphe.

---

## Dérivation

**K12.7** **Camille**

Soit $f$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x) = \ln(x) + x$$

1. Montrer que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ dans un intervalle $J$ à déterminer.
2. Soit $f^{-1}$ la fonction réciproque de $f$. Montrer que $f^{-1}$ est dérivable en 0 et déterminer $(f^{-1})'(0)$.

**K12.8** **Juliette**

Soit $f$ la fonction réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Etudier la dérivabilité de $f$ sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier les variations de $f$.

**K12.9** **Constance Be.**

Soit $f$ la fonction réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-2x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que $f$ est dérivable en 0.

**K12.10** **Cécile**

Montrer qu'il existe un intervalle $I$ (à déterminer) tel que

$$\forall x \in I,\ \sin(x) \geqslant x - \frac{\pi^2}{6}$$

**K12.11** **Inès**

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.
2. Montrer que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à déterminer. On note son application réciproque Argsh
3. Montrer que

$$\operatorname{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

   – par la définition d'une bijection réciproque
   – par un calcul de dérivée

**K12.12** **Jean-Damien, Matthieu P.**

Calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{xe^x - x}$$

**K12.13** **Adèle, Mathilde B.**

Calculer les nombres suivants :

$$\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{2003\pi}{3}\right)\right)$$

**K12.14** **Claire**

Montrer que :

$$\forall x \in [-1,1],\ \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) 2\operatorname{Arctan}(x)$$

**K12.15** **Damien**

Etudier la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

**K12.16** **Capucine**

Etudier la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\sin(x)\right)$$

**K12.17** **Marie**

Montrer que la fonction $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Déterminer la valeur des constantes sur chacun de ces intervalles.

**K12.18** **Manon P., Marion**

Soit $f$ la fonction définie par

$$f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)$$

Déterminer le domaine de définition de $f$ et ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
Montrer que $f$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$, puis que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(x)$$

---

## Systèmes linéaires

**K12.19** **Matthieu P.**

Résoudre dans $\mathbb{R}^5$ le système :

$$\left\{\begin{aligned} x+2y-z+2t+u &= 0\\ y+z-2t+2u &= 0\\ 2x+y-5z-4u &= 0\end{aligned}\right.$$

**K12.20** **Manon V.**

Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système :

$$\left\{\begin{aligned} -y+z+t &= 1\\ -9x+2y+z+2t &= 2\\ x-y+z &= 3\\ -3x+z+t &= 4\end{aligned}\right.$$

**K12.21** **Adèle, Mathilde B.**

Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système :

$$\left\{\begin{aligned} x+y+z-t &= 1\\ x-y-z+t &= 2\\ x-y-z-t &= 3\end{aligned}\right.$$

**K12.22** **Juliette**

Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système :

$$\left\{\begin{aligned} -y+z+t &= 1\\ -9x+2y+z+2t &= 2\\ x-y+z &= 3\\ -3x+z+t &= 4\end{aligned}\right.$$

**K12.23** **Constance Be.**

Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\left\{\begin{aligned} x-my+m^2z &= 2m\\ mx-m^2y+mz &= 2m\\ mx+y-m^2z &= 1-m\end{aligned}\right.$$

**K12.24** **Alexandre**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\left\{\begin{aligned} ax+by+z &= 1\\ x+aby+z &= b\\ `x+by+az &= 1\end{aligned}\right.$$

**K12.25** **Manon P., Marion**

Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\left\{\begin{aligned} x+y+z &= 1\\ mx+y+z &= m\\ x+my+z &= 1\\ x+y+mz &= m\end{aligned}\right.$$

**K12.26** **Camille, Jean-Damien**

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\begin{cases} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2 \\ x + ay + az &= a \\ ax + y + az = 1 \end{cases}$$

**K12.27** **Marie**

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y + 6z &= 0 \\ 4x + 5y + 12z &= \ln(2) \\ 2x + 2y + 5z &= \ln(3) \end{cases}$$

En déduire la résolution du système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} x^3y^2z^6 &= 1 \\ x^4y^5z^{12} &= 2 \\ x^2y^2z^5 &= 3 \end{cases}$$

**K12.28** **Mathilde L.**

Soient $M_1(-2,1), M_2(1,2), M_3(-1,-1), M_4(2,1)$. Combien existe-t-il de polynômes de degré 3 dont la courbe passe par ces quatre points ?

**K12.29** **Martin**

Soient quatre points du plan $A_1, A_2, A_3, A_4$ fixés.

1. A quelle condition existe-t-il un triangle dont $A_1, A_2, A_3$ sont les milieux des côtés ?
2. Même question avec un quadrilatère et $A_1, A_2, A_3, A_4$.