Bijections et continuité. Dérivabilité et fonctions trigo.

Questions de cours

K11.1 **Justine, Théophile**

Soit $f : E \to F$. Définition de "f injective".

K11.2 **Alice, Caroline, Juliane, Tom**

Une fonction strictement croissante sur un intervalle est injective.

K11.3 **Alice, Théophile**

Soit $f : E \to F$. Définition de "f surjective".

K11.4 **Tom**

Réciter le Théorème des Valeurs Intermédiaires.

K11.5 **Emile, Nathalie**

Réciter le Théorème de la Bijection.

K11.6 **Anastasia, Justine, Mathilde, Nicolas, Sergio, Teresa**

Produit de fonctions dérivables.

K11.7 **Emile, Quentin F., Quentin P.**

Quotient de fonctions dérivables.

K11.8 **Benjamin**

Formule de la dérivée de la fonction réciproque

K11.9 **Emma**

Fonction sinus : définition, propriétés, graphe.

K11.10 **Léa, Matthieu B., Noëlle**

Fonction cosinus : définition, propriétés, graphe.

K11.11 **Benjamin, Matthieu B., Noëlle**

Equivalent de $\cos(x) - 1$ en 0.

K11.12 **Théophile**

Dérivée de la fonction tangente.

Continuité/Bijections

K11.13 **Benjamin, Justine, Sergio, Théophile**

Soit E un ensemble et soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

K11.14 **Emma, Nathalie**

Soit E un ensemble et soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = Id_E$. Montrer que f est bijective, et déterminer son application réciproque f^{-1}.

K11.15 **Léa**

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ telles que $g \circ f = Id_E$.
Montrer que g surjective et f est injective.
Montrer que si l'une des deux applictaions est bijectiven, l'autre est bijective aussi.

K11.16 **Sergio**

Soit $f : E \to E$ une application. Démontrer que

$$f \text{ surjective} \iff \forall g, h : E \to E,\ g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

K11.17 **Tom**

Soient f, g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que

$$\forall x \in [0, 1],\ f(x) > g(x)$$

1. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1],\ f(x) \geqslant g(x) + m$.
2. Est-ce toujours valable si f et g sont définies et continues sur $\mathbb{R}$?

K11.18 **Emile**

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $[a, b] \subset f([a, b])$.
Montrer qu'alors f possède au moins un point fixe, i.e. qu'il existe un $t \in [a, b]$ tel que $f(t) = t$.

K11.19 **Benjamin**

Soit f une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f possède un unique point fixe, i.e. qu'il existe un unique $t \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) = t$.

$\boxed{\textbf{K11.20}}$ **Anastasia**

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$.
Montrer que

1. Montrer que si $g \circ f = Id_E$, alors g est surjective et f est injective.
2. On suppose que $g \circ f = Id_E$ et que l'une des deux applications est bijective. Montrer que l'autre est bijective.
3. Etude d'un exemple. On suppose $E = F = \mathbb{N}$.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

et

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f et g ne sont pas bijective. Calculer $g \circ f$.

$\boxed{\textbf{K11.21}}$ **Alice**

Etudier le nombre de solutions de l'équation :

$$(E) : \qquad \ln(x) = \frac{1}{x^3}$$

$\boxed{\textbf{K11.22}}$ **Sergio**

Etudier le nombre de solutions de l'équation :

$$(E) : \qquad \ln(x) = x^3$$

$\boxed{\textbf{K11.23}}$ **Quentin F.**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose le polynôme : $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.
Déterminer, en fonction de n, le nombre de racines du polynôme P_n.

Dérivation

$\boxed{\textbf{K11.24}}$ **Justine, Léa**

Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x) = \ln(x) + x$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ dans un intervalle J à déterminer.
2. Soit f^{-1} la fonction réciproque de f. Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et déterminer $(f^{-1})'(0)$.

$\boxed{\textbf{K11.25}}$ **Emma, Nathalie, Sergio**

Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J à déterminer.
2. Soit f^{-1} la fonction réciproque de f. Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et déterminer $(f^{-1})'(0)$.
3. Calculer f^{-1} et déterminer la fonction $(f^{-1})'$ où cela est possible.
4. Donner l'allure de la courbe de f^{-1} sur le même graphique que celle de f.

$\boxed{\textbf{K11.26}}$ **Matthieu B., Noëlle**

Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty, -1[$ par

$$f(x) = \ln(x^2 - 2x - 3)$$

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera.
2. Préciser $f^{-1}(\ln(5))$ et $(f^{-1})'(\ln(5))$.

$\boxed{\textbf{K11.27}}$ **Anastasia, Teresa**

Soit f la fonction réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier les variations de f.

$\boxed{\textbf{K11.28}}$ **Matthieu B., Noëlle**

Soit f la fonction réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-2x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que f est dérivable en 0.

$\boxed{\textbf{K11.29}}$ **Alice**

Soit f la fonction réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que f est dérivable en 0.

Fonctions trigo

$\boxed{\textbf{K11.30}}$ **Justine, Théophile**

Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{xe^x - x}$$

$\boxed{\textbf{K11.31}}$ **Anastasia, Teresa**

Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin(x))}{\tan(6x)}$$

$\boxed{\textbf{K11.32}}$ **Tom**

Déterminer un équivalent en 0 de :

$$\frac{\sin(x\ln(x))}{x}$$

$\boxed{\textbf{K11.33}}$ **Emile**

Déterminer un équivalent en 0 de :

$$\frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$$

$\boxed{\textbf{K11.34}}$ **Benjamin**

Déterminer un équivalent en 0 de :

$$\frac{\tan(4x)}{\sin(x^2)}$$

$\boxed{\textbf{K11.35}}$ **Mathilde M.**

On définit pour tout x où cela est possible,

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

1. Etudier la fonction f sur $[-\pi, \pi]$. En particulier, étudier le comportement en 0.
2. Montrer que l'équation

   $$\tan(x) = x$$

   admet une unique solution α dans $[\pi, 2\pi]$. Trouver graphiquement comment situer approximativement α sur l'axe des abscisses.
3. Etudier f sur $[\pi, 2\pi]$ et tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[-2\pi, 2\pi]$.

$\boxed{\textbf{K11.36}}$ **Caroline**

1. Etudier la fonction définie par

   $$f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

   et tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.
2. Quel est le plus grand intervalle de la forme $[a, +\infty[$ sur lequel f réalise une bijection ? Dans quel intervalle cette bijection est-elle réalisée ?

$\boxed{\textbf{K11.37}}$ **Quentin P.**

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$.
   On considère la fonction

   $$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x+a) \end{array}$$

   Comment obtient-on $\mathcal{C}_g$ à partir de $\mathcal{C}_f$?
2. Montrer les formules suivantes :

   $$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

   $$\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(a)$$
3. Etudier la fonction f définie par

   $$f(x) = \cos(x) - \sin(x)$$

   et tracer sa courbe.

K11.38 **Juliane**

1. Etudier la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$
Sur quels intervalles f peut-elle réaliser une bijection.
2. Si $a \in \mathbb{R}$, quel est le plus grand intervalle contenant a sur lequel f est bijective ?
3. Quelle relation existe-t-il entre $f(x)$ et $\tan(x)$?

K11.39 **Nicolas**

1. Trouver une fonction $u \ : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et telle que
$$x \longmapsto \sin(u(x))$$
soit injective.
2. Trouver une fonction $u : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ continue et telle que
$$x \longmapsto \sin(u(x))$$
soit injective.