Comparaisons de fonctions. Bijections et continuité.

Questions de cours

K10.1 **Hélène, Manon P., Marie**

Définition de "deux fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de x_0"

K10.2 **Cécile, Jean-Damien, Juliette, Matthieu P.**

Un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré au voisinage de $\pm\infty$.

K10.3 **Cécile, Damien, Hélène, Matthieu P.**

Equivalents usuels.

K10.4 **Inès, Mathilde B.**

Composition des équivalents par la fonction ln.

K10.5 **Alexandre**

Soit $f : E \to F$.
Soit $A \subset E$. Définition de $f(A)$.
Soit $B \subset F$. Définition de $f^{-1}(B)$.

K10.6 **Adèle, Alexandre, Hélène, Mathilde L., Inès**

Soit $f : E \to F$. Définition de "f injective".

K10.7 **Adèle, Alexandre, Camille, Capucine, Claire, Hélène, Mathilde L.**

Soit $f : E \to F$. Définition de "f surjective".

K10.8 **Adèle, Camille, Capucine, Claire, Manon V., Marion, Martin**

Une fonction strictement monotone est injective.

K10.9 **Constance Be., Damien**

Réciter le Théorème des Valeurs Intermédiaires.

K10.10 **Constance Be., Martin**

Réciter le Théorème de la Bijection.

Equivalents et branches infinies

K10.11 **Manon P., Marie**

Donner un équivalent simple, puis la limite en $+\infty$ de :

$$f(x) = x\left(\sqrt{1+e^{-x}} - 1\right)$$

K10.12 **Camille, Claire**

Donner un équivalent simple, puis la limite en $+\infty$ de :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

K10.13 **Cécile, Matthieu P.**

Déterminer la limite en $+\infty$ de

$$f(x) = (1+e^{-x})^{2x^2}$$

K10.14 **Adèle, Mathilde L.**

Déterminer la limite en $+\infty$ de

$$f(x) = \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$$

K10.15 **Damien**

Déterminer la limite en 0 de

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x - \sqrt{1+x}}$$

K10.16 **Matthieu P.**

Déterminer la limite en $+\infty$ de

$$f(x) = x\ln(x) - (x+1)\ln(x+1)$$

K10.17 **Capucine, Hélène**

Déterminer les branches infinies de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

aux bornes de son ensemble de définition.

K10.18 **Constance Be., Martin**

Déterminer les branches infinies de :

$$f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$$

$\boxed{\text{K10.19}}$ Manon P., Marie

$$f(x) = 2e^{-x} - x^2 + 2x$$

Déterminer les branches infinies de f aux bornes de l'ensemble de définition :

$\boxed{\text{K10.20}}$ Camille, Claire

$$f(x) = \left(x + \frac{2}{3}\right)\left(1 + e^{-3x}\right)$$

Déterminer les branches infinies de f aux bornes de l'ensemble de définition :

$\boxed{\text{K10.21}}$ Adèle, Mathilde L.

Déterminer les branches infinies de :

$$f(x) = \ln(1 + x) + x$$

$\boxed{\text{K10.22}}$ Inès

Etudier la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{x + 1}$$

En particulier, effectuer une étude de ses branches infinies.
Montrer que la parabole d'équation $y = x^2 + 1$ est asymptote à la courbe.

Continuité et bijections

$\boxed{\text{K10.23}}$ Manon V.

Trouver à l'aide des fonctions connues un exemple de fonction :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injective, non surjective
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjective, non injective
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ni injective, ni surjective

$\boxed{\text{K10.24}}$ Alexandre

Montrer que la composée de deux applications injectives est encore injective.

$\boxed{\text{K10.25}}$ Cécile, Matthieu P.

Les applications suivantes sont-elles injective, surjective, bijective ?

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array}$.
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x|x| \end{array}$.

$\boxed{\text{K10.26}}$ Martin

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

$\boxed{\text{K10.27}}$ Constance, Martin

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
Montrer que si $g \circ f$ est injective et si f est surjective, alors g est injective.

$\boxed{\text{K10.28}}$ Manon V.

Soient $f : E \to F$ une application bijective et $g : F \to G$.
Montrer que

$$g \circ f \text{ bijective} \iff g \text{ bijective}$$

Application : La fonction

$$h : x \mapsto e^{3x} - 6e^{2x} + 15e^x + 1$$

est-elle bijective dans son image ?

$\boxed{\text{K10.29}}$ Claire

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$.
Montrer que

1. Montrer que si $g \circ f = Id_E$, alors g est surjective et f est injective.
2. On suppose que $g \circ f = Id_E$ et que l'une des deux applications est bijective. Montrer que l'autre est bijective.
3. Etude d'un exemple. On suppose $E = F = \mathbb{N}$.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

et

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f et g ne sont pas bijective. Calculer $g \circ f$.

K10.30 **Manon P., Marie**

Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = Id_E$.
Montrer que f est bijective et exprimer f^{-1} en fonction de f.

K10.31 **Damien**

Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective $\iff$ f est surjective.

K10.32 **Inès**

Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f est surjective
(ii) $\forall B \subset Y, f(f^{-1}(B)) = B$
(iii) $\forall y \in Y,\ f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$

K10.33 **Capucine**

Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f est injective
(ii) $\forall A \subset X, f^{-1}(f(A)) = A$
(iii) $\forall x \in X,\ f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$

K10.34 **Marion**

1. Soit P un polynôme de degré $\leqslant 2$.
   A quelle condition P est-il une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
2. A quelle condition sur ses coefficients un polynôme de degré 3 est-il une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
3. Montrer que $R : x \mapsto \dfrac{2x^3 + 13x^2 + 27x + 17}{x^2 + 5x + 6}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans un intervalle à préciser.

K10.35 **Juliette**

1. Effectuer la division euclidienne de P par Q où :
   $$P = 2X^3 + 13X^2 + 27X + 17, \quad Q = X^2 + 5X + 6$$
2. On pose $R(x) = \dfrac{2x^3 + 13x^2 + 27x + 17}{x^2 + 5x + 6}$.
   Montrer que R réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\left[\dfrac{17}{6}, +\infty\right[$
3. Montrer que R admet une asymptote verticale.

K10.36 **Adèle**

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - x^2$ sur $]-\infty, 0]$.
Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ dans un ensemble à déterminer.

K10.37 **Hélène**

Montrer que l'équation $\ln(x) + x = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^*$.

K10.38 **Jean-Damien**

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction deux-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) \geqslant 0$$

1. Montrer que si $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente en $\mathcal{C}_f$ en a.
2. Montrer que
$$f \text{ bijective} \iff \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0 \\ \text{et } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \end{array} \right. \\ \text{ou} \\ \left| \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0 \\ \text{et } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \end{array} \right. \end{array} \right.$$

K10.39 **Constance Be.**

Soit f la fonction définie par
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{array}$$

1. Déterminer si f est injective, surjective, bijective.
2. Montrer que f réalise cependant une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à déterminer, et exprimer alors sa fonction réciproque.

K10.40 **Mathilde B.**

1. Soit $f : I \to J$ une fonction bijective et $f^{-1} : J \to I$ sa bijection réciproque.
   Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
2. Montrer que f et f^{-1} ont les mêmes variations :
   (a) en supposant f et f^{-1} dérivables
   (b) sans supposer f et f^{-1} dérivables