Limites et comparaisons de fonctions

Questions de cours

K09.1 **Anastasia, Emma**

Traduire avec des quantificateurs la phrase

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

K09.2 **Benjamin, Emile, Léa, Nathalie, Théophile, Tom**

Traduire avec des quantificateurs la phrase

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

K09.3 **Constance Bo.**

Traduire avec des quantificateurs la phrase

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 3$$

K09.4 **Caroline, Noëlle**

Traduire avec des quantificateurs la phrase

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

K09.5 **Benjamin, Mathilde M., Quentin P., Théophile**

Traduire avec des quantificateurs la phrase

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

K09.6 **Noëlle**

Réciter le Théorème de la Limite Monotone.

K09.7 **Emile, Léa, Quentin F., Teresa**

Définition de "deux fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de x_0"

K09.8 **Alice, Juliane, Nathalie, Tom**

Un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré en $+\infty$.

K09.9 **Benjamin, Mathilde M., Teresa, Théophile**

Equivalents usuels.

K09.10 **Matthieu B., Nicolas, Quentin P., Sergio, Théophile**

Composition d'équivalents par un logarithme.

Exercices

K09.11 **Nicolas**

Déterminer toutes les limites de

$$f(x) = \frac{3x^3 - 9x + 6}{x^3 + 12x^2 + 29x - 42}$$

K09.12 **Juliane**

Déterminer toutes les limites de

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 6x + 5}$$

K09.13 **Quentin F.**

Déterminer toutes les limites de

$$f(x) = \frac{4x^2 - 4}{x^3 - x^2 + 2}$$

K09.14 **Mathilde M., Noëlle**

Déterminer les limites en 0^+ et en $+\infty$ de

$$f(x) = \sqrt{x}\mathrm{Ent}\left(\frac{1}{x}\right)$$

K09.15 **Teresa**

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de

$$f(x) = x\mathrm{Ent}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\boxed{\textbf{K09.16}}$ **Caroline**

Déterminer la limite en $+\infty$ de

$$f(x) = \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$$

$\boxed{\textbf{K09.17}}$ **Quentin P., Teresa**

Déterminer la limite en e de

$$f(x) = \frac{\ln(\ln(x))}{x^2 - 3ex + 2e^2}$$

$\boxed{\textbf{K09.18}}$ **Constance Bo., Noëlle**

Déterminer les limites en $+\infty$, en 0^+, en 1^+ et en $\left(\frac{1}{e}\right)^-$ de

$$f(x) = \left(\frac{\ln(x) + 1}{\ln(x)}\right)^{\ln(x)}$$

$\boxed{\textbf{K09.19}}$ **Caroline**

Déterminer la limite en 0^+ de

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$\boxed{\textbf{K09.20}}$ **Nathalie, Tom**

Déterminer la limite en 0 de

$$f(x) = \frac{3^x - 2^x}{x}$$

$\boxed{\textbf{K09.21}}$ **Sergio**

Déterminer la limite en $+\infty$ de :

$$f(x) = \frac{\left((x+1)^{1/x} - x^{1/x}\right)(x\ln(x))^2}{x^{x^{1/x}} - x}$$

$\boxed{\textbf{K09.22}}$ **Nathalie, Tom**

Déterminer la limite en $+\infty$ de

$$f(x) = (x+2)e^{1/x} - x$$

$\boxed{\textbf{K09.23}}$ **Emile, Léa**

Déterminer un équivalent quand $x \to -\infty$ de

$$x\ln(e^x + 1)$$

$\boxed{\textbf{K09.24}}$ **Nathalie, Tom**

Déterminer un équivalent quand $x \to 0$ de

$$\frac{x^x - 1}{x}$$

$\boxed{\textbf{K09.25}}$ **Nicolas**

Déterminer un équivalent quand $x \to +\infty$ de

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^x$$

$\boxed{\textbf{K09.26}}$ **Benjamin, Théophile**

Déterminer un équivalent quand $x \to +\infty$ de

$$x^2\left(e^{1/x} - 1\right)$$

$\boxed{\textbf{K09.27}}$ **Juliane**

Déterminer un équivalent quand $x \to +\infty$ de

$$\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x(x+1)}{x^2}$$

$\boxed{\textbf{K09.28}}$ **Quentin**

Déterminer un équivalent en 2 de

$$\frac{\ln(4-x) - \ln(2)}{\sqrt{-1+x} - 1}$$

$\boxed{\textbf{K09.29}}$ **Emile, Léa**

Déterminer un équivalent quand $x \to +\infty$ de

$$x\left(\sqrt{1+e^{-x}} - 1\right)$$

$\boxed{\textbf{K09.30}}$ **Benjamin, Théophile**

Déterminer un équivalent quand $x \to +\infty$ de

$$x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

K09.31 **Nathalie, Tom**

Déterminer un équivalent quand $x \to +\infty$ de

$$x^2 (\ln(x+1) - \ln(x))$$

K09.32 **Alice, Justine**

Etudier la fonction définie par

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

de manière à tracer sa courbe le plus précisément possible.

K09.33 **Anastasia**

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \ln\left(e^{x^2} - x^2\right)$$

Etudier la fonction f (domaine de définition, domaine de dérivabilité, expression de $f'(x)$ lorsque cela est possible, variations, limites aux bornes, parité, allure de $\mathcal{C}_f$).

K09.34 **Emma, Matthieu B.**

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + x - 12}{1 - x}\right)$$

Etudier la fonction f (domaine de définition, domaine de dérivabilité, expression de $f'(x)$ lorsque cela est possible, variations, limites aux bornes, allure de $\mathcal{C}_f$). Montrer que f n'admet pas d'asymptote oblique.

K09.35 **Justine**

1. Soit P une fonction polynôme telle que

$$P(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$$

   Que peut-on dire de P ?

2. Soit P une fonction polynôme telle que

$$P(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

   Que peut-on dire de P ?

3. Montrer que la fonction définie par

$$R(x) = \frac{2x^4 - x^3 - 2x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 - 1}$$

   admet une asymptote oblique et déterminer son équation.

4. A quelle condition une fonction rationnelle du type $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ avec P et Q deux polynômes a-t-elle une asymptote oblique en $\pm\infty$?

K09.36 **Mathilde M., Teresa**

Déterminer les branches infinies de :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x}$$

K09.37 **Caroline**

Déterminer les branches infinies de :

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$$

K09.38 **Quentin P.**

Déterminer les branches infinies de :

$$f(x) = \ln(1 + x) + x$$

K09.39 **Sergio**

Déterminer les branches infinies de :

$$f(x) = \frac{xe^{-x} + 1}{x \ln(|x|)}$$

K09.40 **Léa**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2e^{-x} - x^2 + 2x$$

Etudier les branches infinies de f aux bornes de l'ensemble de définition.

K09.41 **Nathalie, Tom**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + 3 - xe^{2x}$$

Etudier les branches infinies de f aux bornes de l'ensemble de définition.

K09.42 Benjamin

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x + \frac{2}{3}\right)\left(1 + e^{-3x}\right)$$

Etudier les branches infinies de f aux bornes de l'ensemble de définition.

K09.43 Nicolas

Etudier la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{x + 1}$$

En particulier, étudier les branches infinies.
Montrer enfin que la parabole d'équation $y = x^2 + 1$ est asymptote à la courbe.

K09.44 Quentin F.

Etudier la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

En particulier, étudier les branches infinies.

K09.45 Anastasia

Soit f une fonction paire admettant une tangente au point d'abscisse 0. Montrer que cette tangente est horizontale.

K09.46 Sergio

Déterminer la limite en 0 de :

$$f(x) = (\cos(x) + \sin(x))^{1/x}$$

K09.47 Emma

On appelle fonction strictement convexe sur $\mathbb{R}$ une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) > 0$$

1. Montrer que f a nécessairement l'une des variations suivantes :
   - croissante sur $\mathbb{R}$
   - décroissante sur $\mathbb{R}$
   - décroissante sur $]-\infty, a]$ puis croissante sur $[a, +\infty[$
2. Donner deux exemples de fonctions strictement convexes sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.
   En déduire que l'une des deux limites

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

   est infinie.

K09.48 Sergio

Déterminer toutes les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui admettent une limite finie en 0 et qui vérifient

$$\forall x \in [0,1],\ f(x^2) = f(x)$$

K09.49 Sergio

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\text{Ent}\left(\frac{x+1}{2}\right) + \text{Ent}\left(\frac{x}{2}\right) = \text{Ent}(x)$$

K09.50 Sergio

Soit f une fonction continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$, i.e. qu'il existe un unique réel t tel que $f(t) = t$.