

# Polynômes. Fonctions.

## Questions de cours

**K07.1** Constance Bo, Matthieu B., Nicolas,

Tom

Division euclidienne dans  $\mathbb{K}[X]$ . Démonstration de l'unicité.

**K07.2** Alice, Emma, Juliane

$$P(a) = 0 \iff (X - a) | P$$

**K07.3** Théophile

Fonction  $x \mapsto x^2 - 5x + 3$  : définition, graphe, propriétés.

**K07.4** Caroline, Justine, Quentin F., Teresa

Fonction valeur absolue : définition, graphe, propriétés.

**K07.5** Caroline

Fonction partie entière : définition, graphe, propriétés.

**K07.6** Mathilde M.

Fonction racine carrée : définition, graphe, propriétés.

**K07.7** Mathilde M.

Fonction inverse : définition, graphe, propriétés.

**K07.8** Benjamin, Constance Bo., Nicolas,

Noëlle, Quentin P., Sergio

Fonction logarithme népérien : définition, graphe, propriétés.

**K07.9** Anastasia, Emma, Juliane, Léa, Na-

thalie, Quentin P.

Fonction exponentielle : définition, graphe, propriétés.

**K07.10** Emile

Fonctions puissances : définition, propriétés.

## Polynômes

**K07.11** Emma, Juliane

Effectuer la division euclidienne du polynôme  $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$  par  $X^3 + X + 2$ .

**K07.12** Constance Bo., Nicolas

Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $X^3 - 3X - 2$ .

En déduire la factorisation dans  $\mathbb{R}[X]$  puis dans  $\mathbb{C}[X]$  du polynôme  $X^6 - 3X^2 - 2$ .

**K07.13** Emma, Juliane

Factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme

$$P = X^4 + 1$$

**K07.14** Anastasia, Benjamin

On pose  $P(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$ .

Déterminer les racines de  $P$  et en déduire la factorisation en polynômes irréductibles de  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$  et  $\mathbb{R}[X]$ .

**K07.15** Mathilde M.

On pose  $P(X) = X^4 - 8X^3 + 23X^2 - 26X + 10$ . Le factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis déterminer ses racines.

**K07.16** Matthieu

Soit  $P(X) = (X + 1)^5 - X^5 - 1$ .

Déterminer des racines évidentes de  $P$  et en déduire la factorisation en polynômes irréductibles de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{C}[X]$ .

**K07.17** Quentin P.

On pose  $P(X) = X^5 - X^3 - X^2 + 1$ . Le factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis déterminer ses racines.

**K07.18** Caroline

On pose  $P(X) = 3X^5 - 13X^4 + 16X^3 - 4X^2$ . Le factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  et déterminer ses racines.

**K07.19** Emile, Justine, Quentin F.

Soit  $P(X) = (X + 1)^7 - X^7 - 1$ .

- Déterminer le degré de  $P$ .
- Montrer que  $P$  possède au moins 2 racines réelles entières et en donner leur ordre de multiplicité.
- Montrer que  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$  est une racine double de  $P$ . En déduire une autre racine double de  $P$ .
- Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**K07.20** Nicolas

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère le polynôme

$$P_n(X) = nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}$$

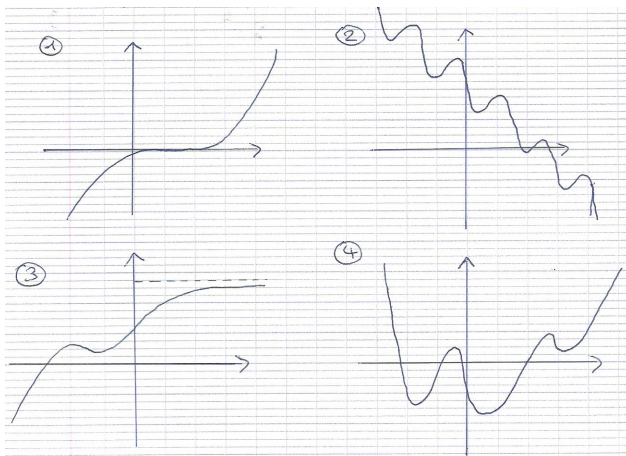
- Vérifier que 2 est racine de ce polynôme.
- Déterminer son ordre de multiplicité.

**K07.21** Sergio

Montrer qu'un polynôme est pair si et seulement si tous ses coefficients d'ordre impair sont nuls.

**K07.22** Nathalie

Parmi les courbes suivantes, lesquelles peuvent représenter une fonction polynomiale? Donner alors une minoration du degré du polynôme.



**K07.23** Sergio

Soit  $P$  un polynôme. On veut montrer l'équivalence entre :

- $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$
- $P$  vérifie

$$(*) : \exists A, B \in \mathbb{R}[X] / P(X) = (A(X))^2 + (B(X))^2$$

- Montrer que  $P$  et  $Q$  vérifient  $(*)$ , alors  $PQ$  vérifie  $(*)$ .
- Montrer le résultat de l'énoncé.

**K07.24** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$ .

On pose  $Q = P + P' + P'' + \dots + P^{(n)}$  avec  $n = \deg(P)$ . Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) \geq 0$ .

## Fonctions

**K07.25** Léa

Etudier la fonction définie par

$$f(x) = e^{3x} - 6e^{2x} + 11e^x - 6$$

**K07.26** Constance Bo., Nicolas

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation suivante :

$$\ln(x) \geq \frac{1}{\ln(x)}$$

**K07.27** Sergio

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction définie par :

$$f(x) = \ln(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$

**K07.28** Noëlle, Teresa

- Etudier la fonction définie par

$$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$$

- Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Combien de solutions l'équation  $f(x) = \alpha$ , d'inconnue  $x$ , admet-elle?

**K07.29 Tom**

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = x^x$$

Déterminer le domaine de définition de  $f$ , son domaine de dérivabilité et exprimer  $f'(x)$  lorsque cela est possible.

**K07.30 Alice**

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{e^{-x} - 1}$$

Déterminer le domaine de définition de  $f$ , son domaine de dérivabilité et exprimer  $f'(x)$  lorsque cela est possible.

**K07.31 Emma, Juliane**

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(x+2)}$$

Déterminer le domaine de définition de  $f$ , son domaine de dérivabilité et exprimer  $f'(x)$  lorsque cela est possible.

**K07.32 Anastasia**

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = e^{\frac{1}{1-x}} - \sqrt{e^{-x} - 1}$$

Déterminer le domaine de définition de  $f$ , son domaine de dérivabilité et exprimer  $f'(x)$  lorsque cela est possible.

**K07.33 Caroline**

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\ln(\sqrt{3x^3 - 8x^2 + 9x - 4})}{x + 2}$$

Déterminer le domaine de définition de  $f$ , son domaine de dérivabilité et exprimer  $f'(x)$  lorsque cela est possible.

**K07.34 Quentin F.**

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}\right)$$

Déterminer le domaine de définition de  $f$ , son domaine de dérivabilité et exprimer  $f'(x)$  lorsque cela est possible.

**K07.35 Mathilde M.**

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \frac{e^{2x+3}}{\sqrt{x^3 + 12x^2 + 29x - 42}}$$

Déterminer le domaine de définition de  $f$ , son domaine de dérivabilité et exprimer  $f'(x)$  lorsque cela est possible.

**K07.36 Nicolas**

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^x - 1}{x^x + 1}\right)$$

Déterminer le domaine de définition de  $f$ , son domaine de dérivabilité et exprimer  $f'(x)$  lorsque cela est possible.

**K07.37 Alice**

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = (x + 1)^x$$

Déterminer le domaine de définition de  $f$ . La fonction  $f$  est-elle major e ? minor e ? admet-elle un minimum, un maximum ? une borne supérieure, une borne inférieure ?

**K07.38 Quentin P.**

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x^2+x+1}}$$

Déterminer le domaine de définition de  $f$ , son domaine de dérivabilité et exprimer  $f'(x)$  lorsque cela est possible.

**K07.39 Matthieu, Tom**

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \ln\left(\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)$$

Déterminer le domaine de définition de  $f$  et montrer que  $f$  est une fonction impaire.

**K07.40** Nathalie

Soit  $P$  un polynôme de degré 2 avec  $\Delta \geq 0$ . Soient  $x_1$  et  $x_2$  ses racines (éventuellement confondues). Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$  est un axe de symétrie de la courbe représentative de  $P$ .

**K07.41** Anastasia

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Calculer  $\text{Ent}(-x)$  en fonction de  $\text{Ent}(x)$ . Etudier alors la parité de la fonction définie par

$$f(x) = (-1)^{|\text{Ent}(x)|} (x - \text{Ent}(x))^2$$

**K07.42** Alice

Montrer que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x - \text{Ent}(x)$$

est 1-périodique.

**K07.43** Théophile

1. Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x - 4}$$

2. Déterminer  $a$  et  $b$  réels tels que

$$\forall x \in D_f, f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-4}$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer pour  $x \in D_f$  une expression de  $f^{(n)}(x)$  (où  $f^{(n)}$  désigne la dérivée  $n$ -ième de  $f$ ).